Matematica in giardino

Note per gli insegnanti

matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

1. SIMMETRIA… MATEMATICA IN GIARDINO

Le piante, e più in generale l'intero mondo vegetale, offrono innumerevoli approcci conoscitivi.

Fig.1 - Sempervivum sp

La grande varietà di forme e di colori fornisce al semplice osservatore una vasta gamma di bellezze naturali e allo studioso diversi spunti di ricerca.

Siamo soliti riconoscere un **fiore** o un **albero** sulla base di certi caratteri, gli stessi in una determinata specie. Non è indispensabile, infatti, essere dei botanici esperti per allenare l'occhio critico: a chiunque di noi è possibile fissare alcuni caratteri nella nostra memoria perché essi si ripetono con una certa regolarità. Pur non essendone consapevoli, stiamo utilizzando un tipo di classificazione che potremmo definire matematica. SE OSSERVIAMO ATTENTAMENTE I VEGETALI NOTIAMO CHE DIVERSE STRUTTURE SONO IDENTIFICABILI USANDO DEI CRITERI DI TIPO MATEMATICO, AD ESEMPIO LA SIMMETRIA.

Fig.2 - Bellis perennis

Molti fiori sembrano avere piani di simmetria o assi di rotazione di ordine 3, 4, 5..., mentre altri, a prima vista, sembrano essere governati dal disordine… ma è solo apparenza! Anche molti tipi di foglie possiedono una forma regolare e possiamo immaginare uno "specchio" che le divide in due metà, una speculare all'altra. E pure le strutture interne e quelle osservabili con un microscopio rivelano una ricca presenza di elementi che si ripetono dando luogo a regolarità.

Tuttavia, come sempre, quando ci riferiamo al mondo vivente parliamo di simmetria con un buon grado di **approssimazione**; ovvero, nulla in natura è perfettamente simmetrico.

Per facilitare la comprensione della teoria geometrica che sta alla base di queste considerazioni, possiamo utilizzare "qualcosa" che ci aiuti a visualizzarla.

Un modo semplice per individuare la presenza della simmetria è l'utilizzo degli SPECCHI.

Se consideriamo una delle simmetrie più semplici, quella di riflessione (definita comunemente bilaterale), sappiamo che il piano di simmetria taglia la figura in due parti speculari.

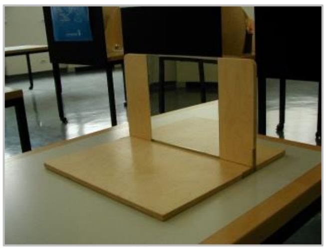


Fig.3 - Specchio singolo

Non sempre però è possibile tagliare in due metà l'oggetto di studio, (soprattutto se si tratta di un vegetale); conviene allora utilizzare un'immagine virtuale, fare una **fotografia** (con un opportuno punto di vista!) e farla scorrere sotto la fessura alla base di uno specchio (come quello qui a destra), e cercare, se esiste, una qualche posizione che permetta di ricreare l'intera figura.

Il piano di simmetria dell' "oggetto vegetale" diventerà un asse di simmetria per la fotografia dell'esemplare oggetto di studio (purché la foto sia stata presa dal punto di vista opportuno) e da questo punto in poi, in queste considerazioni, ci possiamo **RIFERIRE ALLE IMMAGINI DEI VEGETALI CONSIDERATI**.

Con uno specchio singolo possiamo verificare la presenza della simmetria in tutti quegli organismi vegetali che hanno un solo piano che li divide in due metà speculari, come ad esempio il fiore di un'orchidea, la foglia e la samara dell'acero campestre, la foglia dell'edera, alcune specie di diatomee.

Se invece vogliamo determinare quale tipo di regole di simmetria seguono le immagini che possiedono più di un asse di simmetria, abbiamo bisogno di altre "macchine"; per un fiore come quello nella figura qui accanto, ad esempio, possiamo prendere metà petalo (ritagliando uno spicchio) e inserirlo tra due specchi incidenti che formano un angolo di 36°.

Fig.4 - Pyrus sp.

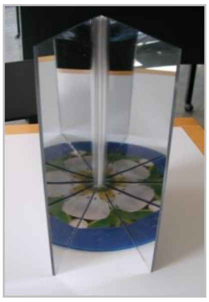


Fig.5 - Specchi "36°"

Dopo questa operazione possiamo verificare che l'immagine riflessa negli specchi è **quasi** uguale all'immagine completa del fiore reale, comparando l'immagine ottenuta dalla riflessione (Fig. 5) con quella del fiore reale (Fig. 4).

Invece, per il fiore nella figura qui a destra, che pur presenta una certa simmetria, non si riesce CON GLI SPECCHI a ricreare l'immagine di partenza: il fatto è che l'immagine del fiore torna in se stessa se si gira intorno al centro di rotazione di 1/5 di giro, ma NON POSSIEDE ASSI DI RIFLESSIONE.

Fig.6 - Trachelospermum jasminoides

L'utilizzo degli specchi offre un approccio inusuale al regno dei vegetali proponendo un percorso di ricerca e di visualizzazione di elementi geometrici che in alcuni casi sfuggono alle consuete osservazioni.

Oltre che allo studio della simmetria, alcuni botanici si sono dedicati allo studio di apparati che sono disposti in modo tale da generare spirali: per esempio le foglie attorno al fusto o ai singoli fiori di un capolino (come quello in Fig.2).

II. FILLOTASSI

Fig. 7 - Giovani esemplari di quercia

La fillotassi è la disciplina che si occupa della disposizione delle foglie su un fusto; il termine deriva dal greco ***phyllon*** = foglia e ***taxis*** = ordine.

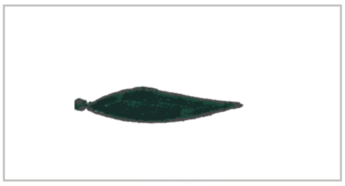
La disposizione delle foglie è ordinata in modo tale che questi apparati fotosintetici non si privino della luce a vicenda, o comunque se ne privino il meno possibile. La parte del fusto dove si inserisce la foglia si chiama **nodo**.

Il numero di foglie per nodo varia da specie a specie; ci interessa qui discutere e esaminare l'ordine con cui si possono disporre le foglie.
I nodi possono portare una o più foglie: il numero di foglie per nodo è un carattere distintivo molto forte che ci permette di distinguere le Monocotiledoni (un'unica foglia per nodo) dalle Dicotiledoni (più di una foglia).

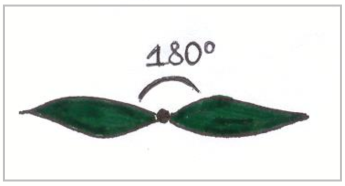
UNA FOGLIA PER NODO O DISPOSIZIONE ALTERNA

Qui di seguito sono elencati vari tipi di fillotassi posseduti da specie vegetali che hanno una sola foglia per nodo. L'osservazione di una pianta dall'alto permette di notare i diversi tipi di disposizione delle foglie, che sono i seguenti:

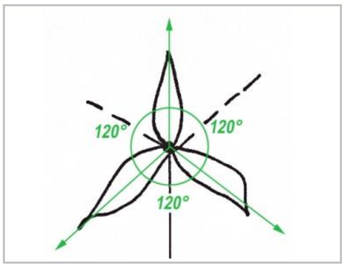
MONOSTICA: osservate dall'alto, tutte le foglie sono una sopra l'altra e tutte disposte nello stesso verso;



DISTICA: viste dall'alto, le foglie sono disposte seguendo la direzione di due semirette che formano un angolo di 180°. La grande famiglia delle *Graminaceae*, monocotiledoni erbacee, ben rappresenta questo caso;

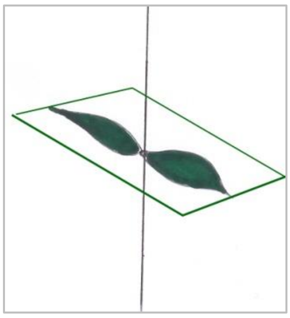


TRISTICA: sempre osservate dall'alto, le foglie sono disposte seguendo le direzioni di tre semirette formanti tra di loro angoli di 120°. La famiglia delle *Cyperaceae* possiede questa disposizione fogliare;



SPIRALE: si usa questo termine quando le diverse direzioni in cui si dispongono le foglie (ortogonalmente rispetto al fusto) sono più di tre.

DUE FOGLIE PER NODO O DISPOSIZIONE DISTICA



Le foglie sono disposte seguendo le direzioni di DUE semirette formanti un angolo di 180°. Se osserviamo la figura a lato, noteremo che da un singolo nodo escono 2 elementi fogliari uno opposto all'altro. A differenza della precedente disposizione distica, in questo caso le semirette giacciono sullo stesso piano orizzontale.

In alcuni casi (disposizione distica decussata), se osserviamo due nodi consecutivi, notiamo che le coppie opposte di foglie si dispongono nel secondo nodo lungo le bisettrici dell'angolo formato dalle foglie del primo, come si evidenzia nelle immagini qui a lato.

Piante comuni che possiedono questo tipo di fillotassi sono l'autoctono frassino maggiore (*Fraxinus excelsior*), l'acero riccio (*Acer platanoides*) e l'ornamentale lillà (*Syringa vulgaris*).

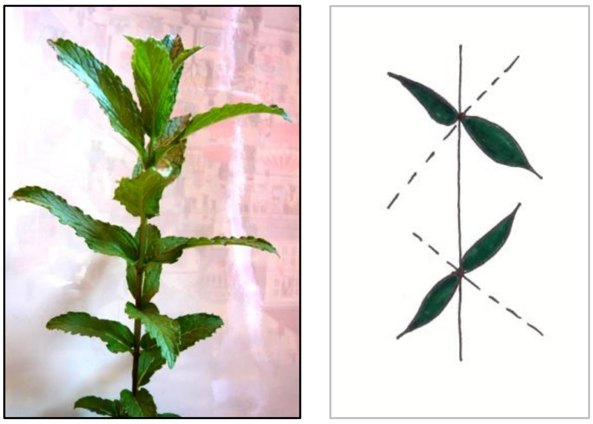
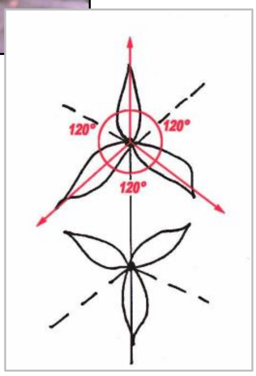


Fig.8 - Mentha sp.

Fig.9 - Nerium oleander

TRE O PIÙ FOGLIE PER NODO O DISPOSIZIONE VERTICILLATA

Ogni nodo porta un numero fisso o variabile di foglie; nel caso in cui ce ne siano tre per nodo, si osserva che è costante (e quindi uguale a 360° : 3 = 120°) l'angolo fra una foglia e l'altra. Come nella fillotassi decussata, le foglie a un dato livello si posizionano lungo le bisettrici degli angoli formati dalle foglie immediatamente superiori/inferiori, come osserviamo nella figura accanto.



Un esempio ben noto è l'oleandro (*Nerium oleander*), pianta mediterranea utilizzata come ornamentale in molti giardini e parchi.

III. I NUMERI DI FIBONACCI

Se osserviamo la disposizione delle foglie sul fusto di una pianta, sia essa erbacea o arborea, possiamo meravigliarci nello scoprire la regolarità con cui queste sono disposte.

Anche se tale fenomeno appare maggiormente evidente in molte specie provviste di due foglie per nodo, se consideriamo quelle che possiedono solo una foglia in ciascun nodo (pensiamo alla comune canna di palude) possiamo, in alcuni casi, trovare una disposizione degli elementi fogliari la cui regolarità si può descrivere e esprimere in termini matematici.

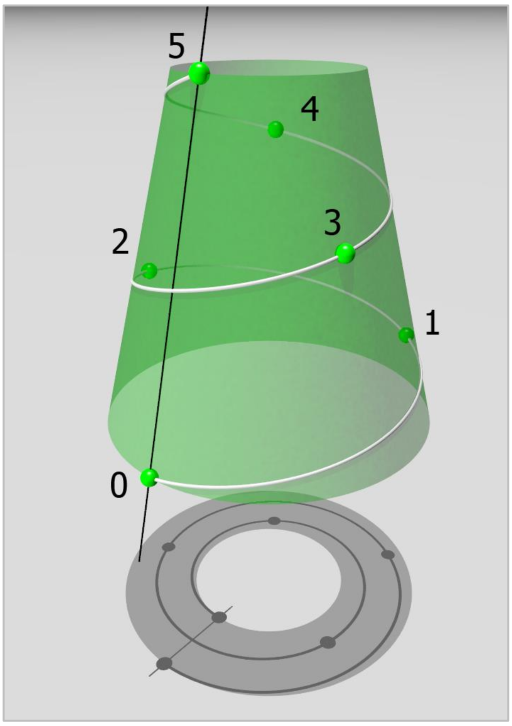


Fig.10 - Modello della sezione di fusto di una pianta erbacea con una foglia per nodo, dove ai nodi sono associati i numeri da 0 a 5

In Figura 10 i punti che corrispondono alle foglie si immaginano sulla superficie di un cono (che dà ragione del fatto che il diametro del fusto delle piante sia erbacee che arboree diminuisce andando verso l'apice vegetativo).
Possiamo costruire un modello immaginando, ad esempio, di avere unito le foglie con una linea (bianca in figura), iniziando dalla più bassa (che chiamiamo n°0) percorrendo il fusto verso l'alto e fermandoci quando abbiamo incontrato un'altra foglia sulla stessa direttrice del cono.

Osserviamo ancora la Figura 10: se abbiamo disegnato una linea con andamento a elica attorno al modello di fusto di una pianta (come in figura) e l'abbiamo proiettato su un piano - che potrebbe essere un foglio di carta – BENE, abbiamo ottenuto una **spirale**.

Cercando di contare quanti giri di elica percorriamo per intercettare due foglie poste sulla stessa verticale, che nella figura sono la numero 0 e la numero 5, ci rendiamo conto che dovremo percorrere il fusto con due giri prima di giungere alla foglia n°5.

Questi numeri possono essere espressi tramite una frazione, detta frazione fillotassica, **N/D** dove N rappresenta il numero di giri di spirale e D il numero delle foglie intercettate (la foglia da cui parte il conteggio è la numero zero).

NEL NOSTRO ESEMPIO LA FRAZIONE FILLOTASSICA RISULTA: 2/5

La frazione **N/D** possiede un importante significato in quanto (interpretata come frazione di 360°) rappresenta l'angolo di divergenza, ovvero l'angolo individuato dalle proiezioni (su un piano perpendicolare al fusto) delle semirette corrispondenti a due foglie consecutive.

La funzione di tale regolare disposizione è quella di permettere alle foglie, posizionate a diversi livelli, di ombreggiarsi il meno possibile l'una con l'altra e di conseguenza di ottenere una maggiore captazione della luce solare.

Per calcolare il valore dell'angolo, si moltiplica 360° (angolo giro in gradi) per la frazione che abbiamo trovato; nel caso rappresentato in Figura 1 si ottiene:

360° x 2/5 = 144°.

Naturalmente questo valore si riferisce al caso particolare che abbiamo preso come esempio; nella realtà ogni specie vegetale possiede il proprio grado di fillotassi, e quindi la frazione fillotassica e l'angolo di divergenza sono differenti per specie diverse.

Le frazioni **N/D** che si riscontrano più frequentemente in natura sono:

1/2 1/3 2/5 3/8 5/13 8/21 13/34 21/55…

Se osserviamo attentamente queste frazioni noteremo che il numeratore (e il denominatore) di ciascuna di esse è la somma dei due numeratori (rispettivamente dei due denominatori) precedenti, e che la sequenza dei numeratori (e anche quella dei denominatori, traslata) corrisponde alla successione di numeri di Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ecc.

La successione è infinita (anche se naturalmente nei vegetali si riscontrano solo i primi termini): a mano a mano che aumentano i valori N e D, il valore della frazione si avvicina al numero 0,381966…

Tale numero è collegato al RAPPORTO AUREO τ, che è quel numero positivo caratterizzato dal fatto che $\tau^2 = \tau + 1$.

Precisamente , all'aumentare dei valori di N e D la frazione **N/D** si avvicina a $\frac{1}{1+\tau}$.

Moltiplicando 360° per 0,381966 otteniamo l'angolo limite di divergenza che corrisponde a **137°30'28"**, ovvero l'angolo ideale che permetterebbe a tutte le foglie di disporsi in modo da ottenere la massima quantità di luce solare indispensabile per la fotosintesi.

Fig. 11 - Helianthus annuus

Referenze iconografiche

fotografie 1-2-4-6-7-8: Giovanna Angelucci
fotografie 3-5: Centro *matematita*
fotografia 9: ©Franco Valoti
disegni di Giovanna Angelucci
figura 10: immagine realizzata da Riccardo Moschetti
figura 11: Centro *matematita*
fotografie di copertina e ultima pagina: ©Franco Valoti