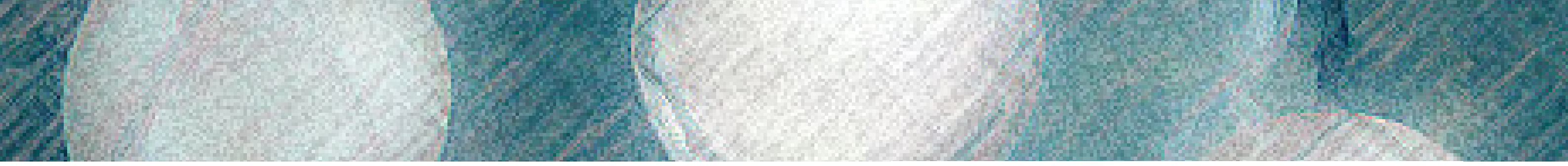


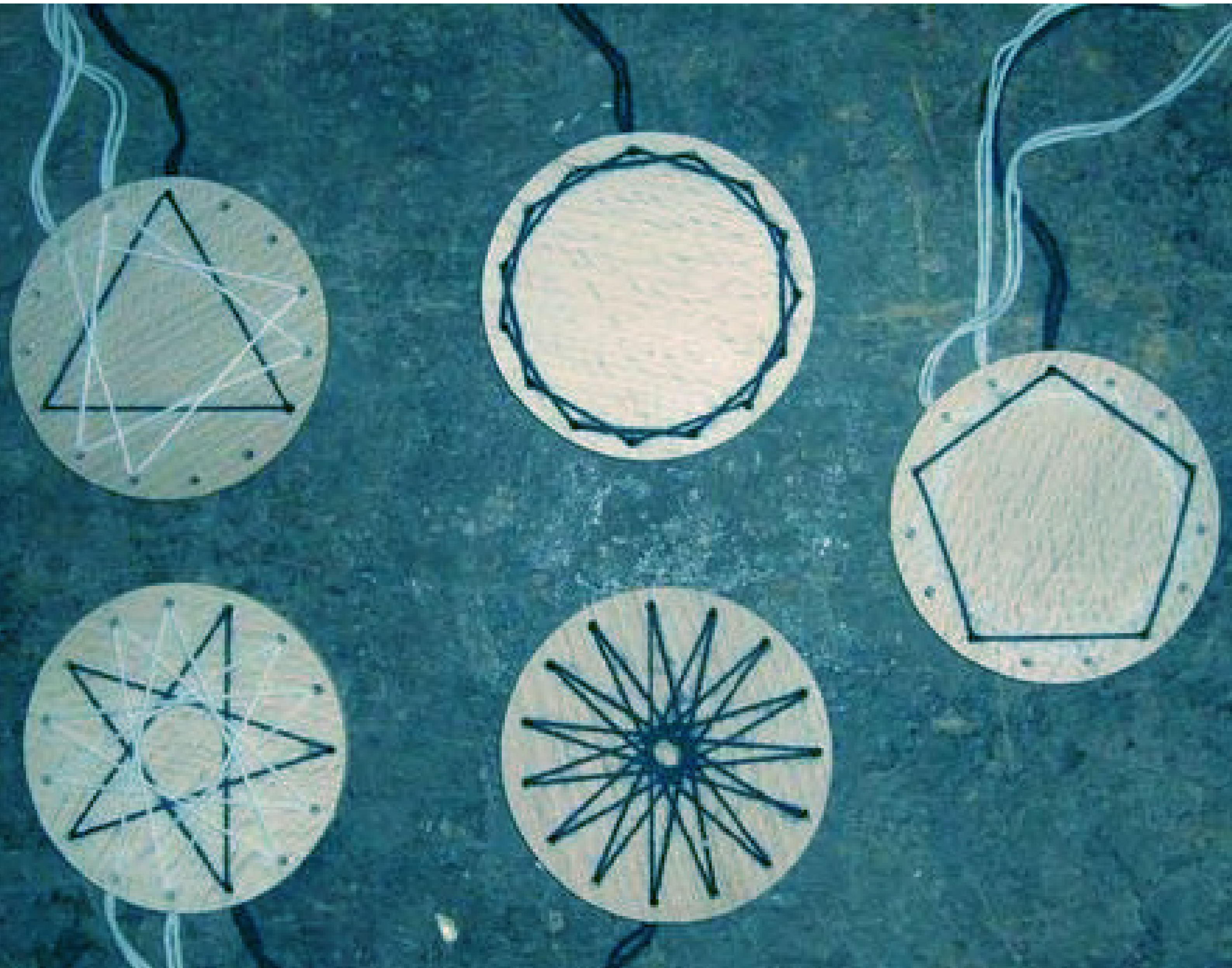
matematita
Centro interuniversitario
di ricerca per la comunicazione
e l'apprendimento informale
della matematica

FASCICOLO INTRODUTTIVO alla **serie di kit** di laboratorio

UGUALI o DIVERSI

La matematica mette in ordine

per le classi della scuola secondaria di primo grado



Collana Quaderni di Laboratorio
Titolo Uguali o Diversi. La matematica mette in ordine - per le classi della scuola secondaria di I grado
Progetto grafico di Marianna Lorini
Impaginazione di Giovanna Angelucci
Revisioni e copertina di Giovanna Angelucci
IV versione – aprile 2012

Questo fascicolo è stato pensato per essere usato con uno dei *kit* di laboratorio cui si riferisce

SOMMARIO

Questo fascicolo è stato pensato per essere usato con uno dei *kit* di laboratorio cui si riferisce

INTRODUZIONE

I laboratori a cui questo fascicolo si riferisce propongono diverse attività riguardanti il concetto di uguaglianza, e quindi problemi di classificazione in svariati settori della matematica.

Le attività sono state calibrate per classi della scuola secondaria di primo grado.

Il materiale a disposizione permette di confrontarsi concretamente con i problemi proposti, attraverso l'osservazione e la manipolazione: questo bagaglio concreto sarà indispensabile per avviare la concettualizzazione astratta e una prima formalizzazione dei concetti coinvolti.

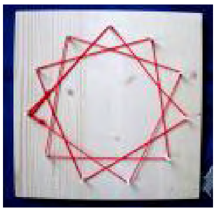
PERCHÉ LA CLASSIFICAZIONE

La classificazione è un nodo concettuale importante che attraversa tutto il *curriculum* scolastico, dalle prime classi della scuola primaria fino agli studi universitari. In matematica, la si incontra in tanti diversi ambiti, ma la si incontra spesso anche al di fuori della matematica: dalle scienze alla musica, ai compiti più usuali della vita quotidiana, siamo abituati ad ogni livello a operazioni legate al problema di "mettere in ordine".

Un'operazione di classificazione è in qualche modo "sottintesa" in ogni procedimento di astrazione; per esempio, fra le prime operazioni che il matematico compie quando analizza una situazione, c'è quella di classificare gli enti che sono oggetto della sua indagine, in modo funzionale all'obiettivo che si è prefisso. Allora la diversità fra due oggetti non appare come una proprietà che sia loro intrinseca, ma come una proprietà che dipende dai parametri scelti per studiarli: due dadi rossi (uno di legno e uno di plastica) sono uguali rispetto al colore e sono diversi rispetto al materiale.

Questa operazione di "mettere in ordine" genera enormi semplificazioni, in quanto permette di considerare solo i contenitori anziché i particolari contenuti, ed è molto naturale in matematica, e in tutti i processi di astrazione, a partire dalla costruzione del linguaggio nella prima infanzia.

La serie di *kit* di laboratorio che qui presentiamo nasce da una mostra del Centro *matematita (Uguali? Diversi! - La bottega del matematico)*, allestita la prima volta a Genova in occasione del Festival della Scienza 2008; ed è significativo il fatto che dalla stessa mostra siano nati anche altri *kit* di laboratorio sugli stessi temi, destinati alla scuola primaria e alla scuola secondaria di secondo grado.



In tutti e tre i casi, i *kit* di laboratorio propongono attività su temi matematici anche molto diversi, ma che hanno in comune un'operazione di "classificazione".
L'idea è quella di offrire ai ragazzi - in maniera diversificata a seconda dell'età e delle competenze acquisite - un esempio della forza e dell'utilità dell'astrazione, in maniera che, al di là dei singoli problemi trattati, essi possano intravedere la potenza dello strumento matematico proprio nel fatto che esiste un filo comune in queste proposte così differenti.
Il ragazzo potrà mimare il mestiere del matematico, nel senso che si troverà alle prese con diverse situazioni nelle quali dovrà decidere (in maniera arbitraria, ma coerente!) i criteri di uguaglianza secondo cui classificare alcuni "oggetti" (a volte concreti, a volte astratti). E in tal modo potrà riconoscere l'inconsistenza di uno dei più diffusi pregiudizi riguardanti la matematica, cioè quello che la vuole una scienza dogmatica e monolitica, e potrà verificare come "fare matematica" possa essere un'esperienza di grande libertà e creatività.

I CONTENUTI

I temi su cui si incentrano le attività di questa serie di *kit* di laboratorio sono 4: la geometria delle forme piane (***Forme***), la topologia (***Nastri***), l'aritmetica modulare (***Stelle***) e la simmetria (***Tombola!***). Non è naturalmente obbligatorio che l'insegnante sviluppi tutti e quattro questi temi, nello stesso periodo o con la stessa classe; raccomandiamo però (per gli ovvi motivi legati al discorso di cui sopra) che ogni classe, discuta almeno due dei quattro temi proposti.
Vediamo qui di seguito un po' più nel dettaglio i contenuti discussi per ciascuno di essi.
Nella **scheda F** (***Forme***) i ragazzi hanno a disposizione un "mucchio" (in senso proprio!) di forme e devono provare a classificarle; in una prima fase li si lascia liberi di esplorare differenti criteri, mentre in una seconda fase si restringe l'attenzione ai quadrilateri e si invitano i ragazzi a esplorare queste forme dal punto di vista della simmetria.
Nella **scheda N** (***Nastri***) i ragazzi possono confrontarsi con un problema di tipo topologico; hanno a disposizione una serie di 7 oggetti (i cosidetti nastri) e una serie di immagini (di cui le prime 7 rappresentano gli oggetti in questione); occorre innanzitutto orientarsi nella situazione (identificando quale immagine riproduce quale oggetto) e poi classificare questi nastri da diversi punti di vista, scoprendo così che alcuni hanno due curve di bordo e altri una sola; o che alcuni, tagliati a metà, si dividono in due pezzi mentre altri no. I ragazzi hanno così modo di scoprire che, a volte, punti di vista anche molto diversi possono portare allo stesso risultato.
Nella **scheda S** (***Stelle***) i ragazzi sono avviati, tramite l'osservazione e la costruzione di stelle, all'aritmetica delle situazioni periodiche; essi hanno a disposizione dei geopiani circolari e dei fili con i quali costruire le stelle, e, oltre che incontrare un altro tipo di "classificazione", genericamente riferito a numeri, possono anche, con questa attività, dare significato a un concetto, come quello del MCD, che troppo spesso rimane solo un'entità formale e vuoto di senso.

Nella **scheda T** (***Tombola!***) si torna a un tipo di classificazione già incontrato nel primo *kit* (***Forme***) (la classificazione delle figure rispetto alla simmetria) e la si sperimenta in un contesto ludico, attraverso il gioco della tombola.

Infine, per tutti i *kit*, il gioco di ***Quarto*** propone un altro momento ludico basato sul concetto di classificazione.

I METODI

La modalità con cui proponiamo che le attività vengano svolte è quella del laboratorio. Essa è strutturata nel modo seguente:

- suddivisione in piccoli gruppi di lavoro (il materiale presente in ciascuno dei *kit* è sufficiente per 5 gruppi di lavoro);
- utilizzo del materiale manipolabile preparato per il laboratorio;
- svolgimento delle attività proposte nelle varie schede di lavoro;
- scrittura delle risposte negli appositi spazi sulla scheda di lavoro.

Questa modalità è finalizzata al raggiungimento di alcuni obiettivi, tipici del fare ricerca in matematica, che possiamo così riassumere:

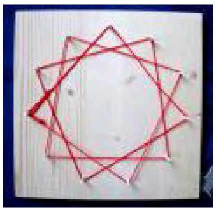
- costruzione del proprio sapere;
- comunicazione delle proprie scoperte;
- interiorizzazione delle nozioni apprese.

Dalla collaborazione tra i componenti del gruppo, dai liberi tentativi di risposta e con la guida delle schede di lavoro, i ragazzi giungono autonomamente ad acquisire alcune conoscenze di base sulle problematiche legate al concetto di uguaglianza.

È importante che gli studenti scrivano le risposte a cui sono giunti, anche se sbagliate. Infatti è molto meglio partire da qualcosa di sbagliato, ma che è scaturito dai loro ragionamenti, piuttosto che mettere loro in testa le nostre risposte (se le dimenticherebbero a breve!). Inoltre è proprio nel momento in cui si rielaborano le conoscenze per comunicarle per iscritto che queste vengono interiorizzate e comprese a fondo. Infine, il fatto di riportare le risposte sulla scheda consente di tenere traccia del lavoro svolto, che più tardi può eventualmente essere ripreso in classe.

Altrettanto importante è che i ragazzi acquisiscano o affinino la capacità di descrivere la realtà e, in un certo senso, di “raccontare la matematica”. Riteniamo che questa abilità sia un passaggio fondamentale dell’apprendimento, successivo alla fase di osservazione, e che NON ne sia automatica conseguenza. In generale, l’aver capito i concetti, le proprietà, le “regole del gioco” non si traduce automaticamente in una facilità a descrivere tutto ciò ai compagni: per raggiungere questo secondo obiettivo, occorre insistere con attività che siano a ciò esplicitamente finalizzate.

Durante lo svolgimento del laboratorio, l’insegnante ha il compito di sorvegliare le attività dei vari gruppi, garantendo una generale situazione di equilibrio. Può certamente sciogliere dubbi o fornire chiarimenti, sottolineare gli aspetti critici che scaturiscono dai ragionamenti e magari porre ulteriori domande suggerite proprio dai dibattiti in corso all’interno del gruppo, ma non deve dare risposte, facendo sempre in modo che gli studenti giungano autonomamente alle soluzioni.



La scheda di lavoro svolge la funzione di filo conduttore del laboratorio, ma non è necessario che venga seguita pedissequamente. Anzi, in certe occasioni, può essere particolarmente utile e stimolante discostarsi dal tracciato delle schede, magari per seguire degli spunti scaturiti spontaneamente dal lavoro dei ragazzi. È importante lasciare ai gruppi il tempo di svolgere le attività richieste, e non importa se qualche gruppo non riesce a terminare l'attività nel tempo stabilito; importa invece che tutti affrontino i quesiti scontrandosi con le difficoltà proprie del laboratorio e cercando di ragionare sui metodi da adottare per superarle. Lo scopo del laboratorio non è infatti quello di arrivare al completamento dell'intera scheda, ma – come abbiamo sottolineato – quello di aiutare i ragazzi a costruire il proprio sapere autonomamente.
La guida attenta e competente dell'insegnante resta naturalmente un elemento cruciale sia per stimolare opportunamente i ragazzi (durante l'attività), sia per aiutarli (alla fine) a tirare le fila del lavoro fatto. Una componente essenziale della modalità laboratoriale, infatti, è il momento finale in cui i diversi gruppi dei ragazzi si raccontano l'un l'altro i progressi fatti e le conclusioni raggiunte: la classe arriva così a un momento condiviso di accrescimento delle conoscenze. Si tratta di una fase difficile e critica, ma essenziale perché l'apprendimento non resti episodico; è compito dell'insegnante, in questa fase, intervenire con domande mirate, allo scopo sia di correggere eventuali errori che non siano già stati corretti autonomamente dai ragazzi, sia di mettere in evidenza alcune soluzioni particolarmente interessanti, sia di "mettere ordine" quando (come spesso accade) nella discussione si accavallano tante cose, magari tutte corrette, ma si è perso il filo di dove si sta andando e c'è bisogno di ricordarlo.

I POSSIBILI PERCORSI E I TEMPI

Ciascuna delle schede di lavoro commentate in questo quaderno nasce da un'attività di laboratorio testata presso il Centro *matematita* (e corrispondente a un paio d'ore). Naturalmente questa previsione di tempi è puramente indicativa, perchè dipende ovviamente dal livello di approfondimento che l'insegnante vuole riservare all'argomento.

Le schede di laboratorio sono le stesse per tutte le classi (dalla prima alla terza), a ricordare che non ci sono particolari prerequisiti che rendano una scheda inutilizzabile, ad esempio, prima di una certa classe.

Naturalmente, ad una medesima richiesta, faranno riscontro risposte diverse e si accetteranno livelli di approfondimento diversi, a seconda dell'età dei ragazzi (si vedano i commenti alle singole attività delle schede).

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Materiale presente in tutti i 4 *kit* di laboratorio:

1. questo fascicolo di presentazione;
2. una scatola con il gioco di **Quarto**;
3. un CD–rom contenente i *files* per il materiale cartaceo utile nello svolgimento del laboratorio ed eventuale altro materiale di integrazione.

Materiale relativo al kit F (*Forme*):

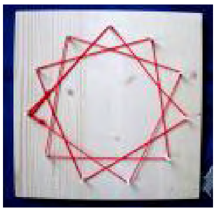
1. forme in gomma crepla (5 sacchi contenenti ciascuno numerose forme);
2. 15 specchietti di plexiglass specchio;
3. un foglio plastificato con l'elenco del materiale.

Materiale relativo al kit N (*Nastri*):

1. 10 rettangoli di stoffa dotati di *zip* su due lati, 5 rossi con le *zip* messe nello stesso verso, 5 blu con le *zip* messe in verso opposto;
2. 5 serie di 7 fettucce colorate;
3. un mazzo di 42 schedine con immagini di nastri che si riferiscono a 2 serie, di 7 nastri ciascuna: ci sono 5 copie della prima serie e 1 sola copia della seconda;
4. 6 fogli plastificati, formato A4 con le immagini dei 14 nastri (di 2 tipi: 5 copie del primo e una sola del secondo);
5. rettangoli di carta;
6. un foglio plastificato con l'elenco del materiale.

Materiale relativo al kit S (*Stelle*):

1. 12 geopiani circolari (5 con 7 pioli, 1 con 11 pioli, 5 con 12 pioli, 1 con 15 pioli);
2. 40 fili di lana di lunghezze e colori diversi;
3. un mazzo di 35 schedine plastificate con immagini di stelle;
4. 5 mazzi di 19 schedine plastificate per il tabellone delle stelle;
5. 5 mazzi di schedine plastificate con i numeri da -20 a 100;
6. il tabellone delle stelle: 5 fogli plastificati;
7. i cartellini con i giorni della settimana e con i mesi dell'anno;
8. un foglio plastificato con l'elenco del materiale.



Materiale relativo al kit T (*Tombola*):

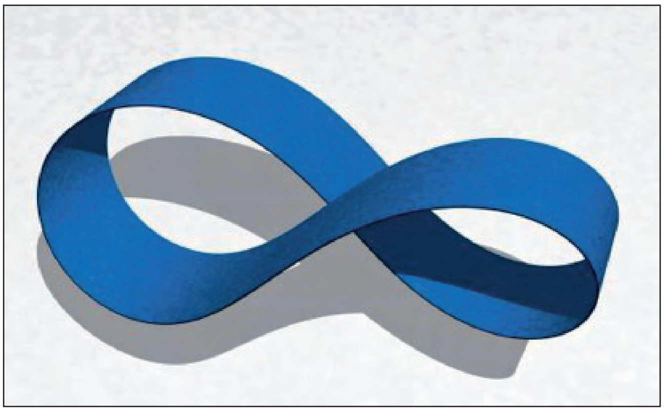
1. sei cartelle della tombola plastificate, un pacchetto di cartellini da estrarre ed un sacchetto di fagioli;
2. cinque set di 30 schedine a colori plastificate;
3. un foglio plastificato con l'elenco del materiale.

Nota importante: in questo fascicolo, per ogni scheda è riprodotto in **nero** (con le figure) il testo dato ai ragazzi, mentre in **blu** sono scritti i nostri commenti destinati agli insegnanti.

UN'OSSERVAZIONE SULLE IMMAGINI

In questo fascicolo si fa largo uso di immagini sia per illustrare un concetto, sia per mostrare più esempi possibili di una stessa situazione. Per ovvie questioni di spazio, non tutte le immagini citate sono qui riprodotte, ma tutte, comunque, sono indicate con un numero in grassetto: **11367**, per esempio, indica un'immagine reperibile in rete sul sito *Immagini per la matematica* del Centro *matematita*, all'indirizzo:

http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&im=11367.



Nello stesso sito si possono trovare molte altre immagini collegate ai temi toccati, tutte dotate di una didascalia ipertestuale che spesso rimanda dall'una all'altra, e si possono trovare anche alcune animazioni e alcuni approfondimenti.

I settori che possono più in particolare essere utili per questi *kit* di laboratorio sono:

- la sezione dedicata alla mostra *Uguali? Diversi!* (per tutti i *kit*)

http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=1014

- la sezione dedicata alla simmetria (per il *kit* T) http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=3

- la sottosezione dedicata alla simmetria dei rosoni (per il *kit* T)

http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=121

- due animazioni sul nastro di Moebius(per il *kit* N)

http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=anim.sub2
(per visualizzare questa animazione è necessario avere installato il plugin per filmati video/mpeg)

- immagini di nastri di Moebius(per il *kit* N)

http://www.matematita.it/materiale/index.php?p=cat&sc=325

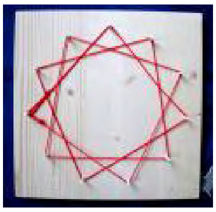
ALCUNE INDICAZIONI BIBLIOGRAFICHE

AAVV, *Uguali? Diversi!-La bottega del matematico*, la raccolta contiene 11 poster grandi della mostra, Milano 2008.

AAVV, *Uguali? Diversi! La matematica delle classificazioni*, XlaTangente, n.11, settembre 2008, pagg. 32-42.

AAVV, *Diversi? Uguali! Il viaggio nelle classificazioni continua… e non solo in matematica*, XlaTangente, n.12, novembre 2008, pagg. 26-38.

P. Gallo, C. Vezzani, *Mondi nel mondo - fra gioco e matematica*, Mimesis, 2007.
(http://www.quadernoaquadretti.it/quaderno/mondi_pres.php)
Il capitolo 4 tratta del problema della classificazione in matematica e approfondisce il discorso avviato nei poster 11557 e 11560.



SCHEDA F

FORME

Avete sul tavolo un mucchio di forme disordinate; ci aiutate a metterle in ordine?
Scrivete qui sotto come avete fatto a ordinarle: …

> ***ATTENZIONE:*** Tutti i componenti del gruppo devono essere d'accordo con le regole che decidete per mettere in ordine, e ognuno deve essere in grado di ritrovare una forma velocemente (proprio come quando cercate un paio di calzini o una maglietta nella vostra camera).

Suggeriamo di lasciare in questa fase i ragazzi completamente liberi di proporre dei "criteri", anche provando con criteri che sicuramente non funzioneranno (ad esempio forme "belle" e forme "brutte"); è bene però che siano loro ad accorgersi che è necessario che un criterio sia oggettivo e non ambiguo (oggettività che sarà un po' difficile raggiungere con un criterio come la bellezza).

Da parte vostra, limitatevi a forzarli soltanto a SCRIVERE il criterio scelto, perchè ciò permetterà di tornarci sopra per decidere se si trattava di un buon criterio oppure no.

Ci aspettiamo che a questo punto abbiate sul tavolo diversi mucchietti di forme.
Per esempio, se aveste deciso di metterli in ordine rispetto al colore, avreste un mucchietto di forme tutte rosse, uno di forme tutte gialle, ecc. e il criterio usato sarebbe stato quello secondo cui:

> *due forme vanno nello stesso mucchio quando hanno lo stesso colore, e vanno in mucchi diversi quando hanno colori diversi.*

Questo criterio però è poco interessante dal punto di vista della geometria; ne vogliamo trovare con voi altri più interessanti. Mettete in disordine nuovamente le forme e trovate almeno altri due criteri per ordinarle in mucchietti diversi.

Criterio I

> *due forme vanno nello stesso mucchio quando* …

Criterio II

> *due forme vanno nello stesso mucchio quando* …

Valgono gli stessi commenti di prima; ci aspettiamo che i ragazzi comincino qui a cercare qualche criterio "geometrico", ma non sarà immediatamente facile individuare un "buon" criterio. Anche con un criterio abbastanza naturale e apparentemente oggettivo come grande/piccolo, i ragazzi troveranno qualche difficoltà (grande sì, ma grande quanto? Può ben succedere che una forma che appare grande a uno appaia piccola a un altro: come decidere in modo non ambiguo? Lasciate di nuovo che siano loro a proporre delle soluzioni, ad esempio "grande" potrebbe significare che non entra in una certa scatola, oppure che è più lungo di una data matita, oppure…).

Alcuni criteri che si può provare a suggerire ai ragazzi (se non dovessero emergere spontaneamente da loro) possono essere:

- *poligoni e figure che non sono poligoni;*

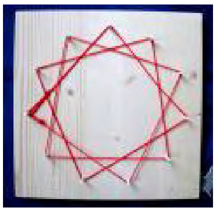
- *figure con buchi e figure senza buchi;*
- *figure concave e figure convesse. Non c'è bisogno che i ragazzi conoscano la parola concavo o convesso; si può far osservare la differenza fra i due casi per esempio immaginando di ritagliare la forma da un foglio di carta: le figure convesse sono quelle per cui, ritagliandole da un foglio di carta, non accade mai di rovinare la figura perchè la forbice ci è scappata un po' oltre il dovuto.*

In tutti questi casi le forme si dividono semplicemente in due gruppi (sì-no) e il criterio per stare nello stesso gruppo (rispettivamente, in gruppi diversi) esprime il fatto che le due forme verificano (rispettivamente, non verificano) entrambe la proprietà che stiamo esaminando.
Possono essere più interessanti dei criteri che portano a una classificazione in più mucchi; alcuni esempi possono essere:

- *(limitandosi alle forme poligonali) due figure stanno nello stesso mucchio se hanno lo stesso numero di lati; e, se ci dà noia aver escluso alcune forme, possiamo anche aggiungere un mucchio costituito dai "non-poligoni";*
- *due figure stanno nello stesso mucchio se hanno la stessa forma, cioè se sono simili (e per le forme poligonali questo si può verificare controllando se certi angoli sono uguali e certi lati sono in proporzione...).*

Nel seguito analizzeremo in modo più sistematico alcuni criteri legati alla simmetria. Tanto meglio se già in questa fase emerge spontaneamente dai ragazzi un tentativo in questa direzione.
Non esploriamo invece in questa scheda l'idea della similitudine: naturalmente l'insegnante può cogliere questo spunto, magari con i ragazzi più grandi, per introdurre oppure per riprendere questo argomento.

N.B. È importante che i criteri siano condivisi, e non ambigui. Siete sicuri che anche i compagni del tavolo a fianco, se dite loro il criterio che avete usato, otterrebbero la stessa classificazione che avete ottenuto voi con le forme che avete sul tavolo?
Proviamo!
Scegliete uno dei criteri che avete utilizzato e passatelo al tavolo a fianco. Fatevi dare dai vostri compagni uno dei loro criteri e mettete di nuovo in ordine le forme



usando il loro criterio. Scrivete qui sotto il criterio dei vostri compagni e registrate se avete incontrato delle difficoltà nella classificazione. Il vostro insegnante vi dirà se la classificazione a cui siete arrivati è la stessa a cui sono arrivati i vostri compagni …

Quest'ultima attività può essere molto significativa per i ragazzi, ma presenta qualche difficoltà di realizzazione, quindi vi suggeriamo di organizzarla bene prima di proporla.

La gestione ottimale prevede, per esempio, che due gruppi di ragazzi abbiano un certo numero di forme (e, perché l'attività sia significativa, questo numero deve essere abbastanza alto, dalla trentina in su), le mettano in ordine, scrivano il criterio con cui le hanno divise e registrino la divisione (e questo è l'aspetto più noioso, anche se è ovviamente indispensabile; si potrebbe eventualmente provare a registrarlo con una foto). Successivamente, i due gruppi si scambiano le forme (se i mucchi di partenza fossero stati diversi), si passano il criterio che avevano deciso e ciascun gruppo mette in ordine le nuove forme secondo il criterio stabilito dall'altro gruppo. Naturalmente sono due le cose da verificare: se i ragazzi riescono senza problemi a usare il criterio dei loro compagni e se il risultato è poi lo stesso; da qui nasce la necessità di "registrare" in qualche modo la classificazione finale.

Non pensiamo sia utile con ragazzi così giovani insistere sulla formalizzazione di questa situazione.

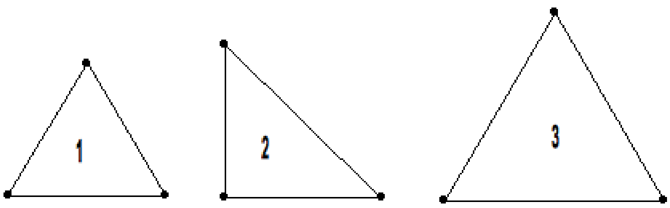
Una tale formalizzazione prevederebbe il far loro osservare che un criterio di classificazione, per essere un buon criterio, deve essere una relazione di equivalenza, ovvero una relazione riflessiva (ogni elemento è in relazione con se stesso), simmetrica (se a è in relazione con b, anche b è in relazione con a) e transitiva (se a è in relazione con b, e b è in relazione con c, allora anche a è in relazione con c). Sono proprio queste tre proprietà che permettono di "affettare" l'insieme su cui la relazione di equivalenza è definita in classi di equivalenza (raggruppando cioè tutti gli elementi equivalenti a uno dato), che coprono, senza sovrapposizioni, tutto l'insieme da cui si è partiti.

Anche senza parlare di relazioni di equivalenza o di transitività (che è superfluo a questo stadio), vale la pena però per esempio di far notare ai ragazzi COSA non funziona, se capitasse loro di usare dei criteri che non siano dei buoni criteri.

Vi facciamo un esempio, per chiarire cosa intendiamo. Un "criterio" emerso dai ragazzi in una delle sperimentazioni di questo laboratorio è stato il seguente:

> Mettiamo due forme poligonali nello stesso gruppo quando troviamo che hanno almeno un lato della stessa lunghezza.

Questo non è un buon criterio, perché la relazione corrispondente non è transitiva. Ad esempio



i triangoli 1 e 2 sono equivalenti secondo questo criterio, 2 e 3 pure, ma 1 e 3 non lo sono.

In un caso del genere, potreste allora far osservare ai ragazzi come il motivo per cui questo non è un buon criterio è proprio il fatto che impedisce di fabbricare i mucchi in maniera coerente: 1 e 2 dovrebbero andare nello stesso mucchio, 2 e 3 pure, ma 1 e 3 devono andare in mucchi diversi.

Interiorizzare un esempio di questo genere sarà un buon modo per ottenere che in seguito, quando i ragazzi incontreranno in maniera formalizzata le relazioni di equivalenza, e il fatto che ogni relazione di equivalenza induce una partizione in classi di equivalenza (che sono proprio i mucchi!), siano in grado di dare significato a questa costruzione e non la lascino restare un'astrazione formale priva di senso.

Adesso vi indichiamo noi un possibile criterio.

Prendete intanto fra le forme che avete sul tavolo soltanto i quadrilateri e mettete via tutte le altre.

Criterio:

> *due forme vanno nello stesso mucchio quando hanno lo stesso numero di assi di simmetria, e vanno in mucchi diversi se hanno un numero diverso di assi di simmetria.*

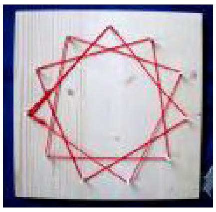
Per questa attività potrebbero esservi utili gli specchietti. Ci accorgiamo della presenza di un asse di simmetria per una figura provando ad appoggiare uno specchio sulla figura: se troviamo una posizione per cui la parte di figura non nascosta dallo specchio insieme alla sua immagine riflessa ridà l'intera figura, allora la retta corrispondente alla posizione dello specchio è un **asse di simmetria** della figura.

Non è necessario che i ragazzi abbiano già incontrato la nozione di asse di simmetria. Si potrebbe anche utilizzare proprio questa attività per un'introduzione alla simmetria. Oppure, in altre classi dove invece il concetto è già stato esplorato, questa attività vi può servire per valutare il grado di interiorizzazione di questi concetti da parte dei ragazzi.

Dividete ora tutti i quadrilateri in gruppi, a seconda di quanti assi di simmetria trovate per ciascuna figura.

Avete trovato quadrilateri privi di assi di simmetria? Sì □ No □

Se la risposta è sì, trovate in questo gruppo dei quadrilateri particolari di cui conoscete il nome? Scrivetelo qui sotto: … *fra le forme a disposizione dei ragazzi ci sono sia parallelogrammi, sia trapezi non isosceli, sia quadrilateri completamente asimmetrici che non rientrano in queste categorie. Di tutte le forme, quella del parallelogrammo è sicuramente quella che darà più difficoltà (e genererà più errori), perché in modo naturale ci appare simmetrica e, in effetti,* ***è*** *simmetrica: solo che la simmetria che manda la figura in se stessa è una rotazione di 180° e non è la rifles-*



sione rispetto a una retta, quindi la figura non ha assi di simmetria (ha invece un centro di simmetria).

Avete trovato quadrilateri con un solo asse di simmetria? Sì □ No □
Se la risposta è sì, trovate in questo gruppo dei quadrilateri particolari di cui conoscete il nome? Scrivetelo qui sotto: … *una possibilià è il trapezio isoscele; altre possibilità sono aquiloni, frecce, ovvero quadrilateri – concavi o convessi – con le diagonali perpendicolari fra loro e tali che il loro punto di intersezione sia il punto medio di una delle due.*

Avete trovato quadrilateri con esattamente due assi di simmetria? Sì □ No □
Se la risposta è sì, trovate in questo gruppo dei quadrilateri particolari di cui conoscete il nome? Scrivetelo qui sotto: … *rettangoli e rombi (che non siano quadrati).*

Avete trovato quadrilateri con esattamente tre assi di simmetria? Sì □ No □
Se la risposta è sì, trovate in questo gruppo dei quadrilateri particolari di cui conoscete il nome? Scrivetelo qui sotto: …

Avete trovato quadrilateri con esattamente 4 assi di simmetria? Sì □ No □
Se la risposta è sì, trovate in questo gruppo dei quadrilateri particolari di cui conoscete il nome? Scrivetelo qui sotto: … *quadrati*

Avete trovato quadrilateri con più di 4 assi di simmetria? Sì □ No □
Se la risposta è sì, trovate in questo gruppo dei quadrilateri particolari di cui conoscete il nome? Scrivetelo qui sotto: …

Ci sono alcuni di questi gruppi che sono rimasti vuoti: pensate che sia un caso (solo perché non avevate sul tavolo abbastanza forme, ma potreste trovare degli esempi) o che le cose stiano proprio così, cioè pensate che non esistano quadrilateri con quel numero di assi di simmetria? …
Qualunque risposta abbiate dato, come fareste a convincere un vostro compagno che non ha fatto questo laboratorio della bontà di questa risposta? …
Questa è certamente la domanda più difficile: non possiamo certo pretendere di avere una risposta esaustiva e scritta correttamente. È bene però cominciare da subito a chiedere i "perché?" dei fenomeni osservati, anche quando ben sappiamo che i ragazzi non hanno ancora gli strumenti sufficienti per rispondere. In realtà, l'obiettivo principale della domanda è quello di fare in modo che i ragazzi diventino consapevoli del fatto che occorre un "perché", che una affermazione motivata è qualitativamente diversa da una che non lo è.
Se non sono mai stati stimolati a porsi dei "perché", non capiranno cosa vogliamo da loro quando, più tardi, chiederemo loro le "dimostrazioni": penseranno a queste dimostrazioni come a delle cantilene da recitare, prive di significato.
Nella sperimentazione svolta abbiamo osservato che non era infrequente il caso di ragazzi che arrivassero a essere consci che non si trattava di una casualità;

in alcuni casi addirittura sono arrivati a rendersi conto del fatto che è necessario che il numero degli assi di simmetria sia un divisore di 4 (e quindi 3 non va bene; e nemmeno un numero più grande di 4), anche se le argomentazioni erano sempre (ovviamente!) molto vacillanti.

Pensate ai quadrilateri di cui conoscete il nome (ad esempio i rettangoli, i trapezi, i parallelogrammi): stanno tutti nello stesso gruppo, o ne incontrate in gruppi diversi? Registrate le vostre osservazioni qui sotto: …

Vedi le risposte precedenti; ci preme qui ottenere che i ragazzi si rendano conto che i "nomi" che loro conoscono di quadrilateri rappresentano una classificazione dei quadrilateri, e che questa classificazione è per l'appunto legata alla simmetria.

L'insegnante può decidere di terminare qui l'attività relativa a questa scheda. Se invece valuta che per una data classe possa essere utile e significativo un ulteriore approfondimento su questi temi, lo spunto proposto qui di seguito ha a che fare con esagoni e pentagoni, da classificare in base allo stesso criterio.

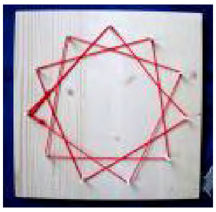
Il tempo a vostra disposizione non è ancora finito? Riprendete il mucchio di tutte le forme che avevate a disposizione e provate a utilizzare lo stesso criterio di classificazione con gli esagoni:

Trovate esagoni privi di assi di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con un solo asse di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con esattamente 2 assi di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con esattamente 3 assi di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con esattamente 4 assi di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con esattamente 5 assi di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con esattamente 6 assi di simmetria?	Sì □	No □
Trovate esagoni con più di 6 assi di simmetria?	Sì □	No □

In totale quanti gruppi di esagoni avete trovato? … 5

E, se rifaceste la stessa cosa con i pentagoni, quanti gruppi di pentagoni vi immaginate di poter trovare? … *Solo tre: il pentagono regolare con 5 assi di simmetria, un pentagono con un solo asse di simmetria (quindi con un vertice sull'asse e due coppie di vertici simmetrici rispetto allo stesso asse) e un pentagono completamente asimmetrico.*

Perché secondo voi così tanti tipi di esagoni e così pochi di pentagoni? … *Anche questa domanda non è affatto facile e naturalmente ci accontentiamo che i ragazzi intuiscano che la cosa ha a che vedere con il fatto che 5 è un numero primo e che 6 ha invece tanti divisori. Una giustificazione di questo fatto passa attraverso quanto citato già prima circa il numero degli assi di simmetria di un poligono a* n *lati, che è necessariamente un divisore di* n*. E questo a sua volta è legato alla struttura di*



gruppo: il risultato astratto che lo determina è il fatto che in un gruppo con n *elementi ogni sottogruppo ha un numero di elementi che è un divisore di* n*.*

A livello più intuitivo si può osservare che, se abbiamo un certo numero n *di assi di simmetria, un vertice che non appartenga a nessuno di questi assi "produce"* 2n *vertici; mentre se il punto appartiene a uno di questi assi i vertici "prodotti" sono la metà.*

SCHEDA N

NASTRI

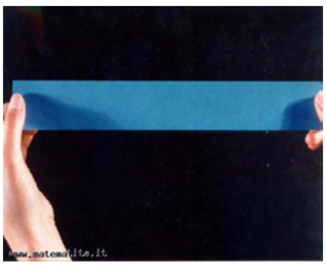
1. Nastri
Le immagini raccolte nei due fogli che avete a disposizione raffigurano alcune superfici che chiamiamo nastri. Per alcuni di essi, quelli indicati con le lettere dalla A alla G, avete a disposizione anche dei modelli in fettuccia che hanno lo stesso colore dell'immagine corrispondente e che potete osservare e manipolare.
Affronteremo nel seguito diverse attività con l'obiettivo di "mettere in ordine" questi nastri, ovvero di cercare dei criteri con cui distinguerli. Prima di iniziare, prendetevi un po' di tempo per osservare i modelli in fettuccia e le immagini e per familiarizzare con queste forme.

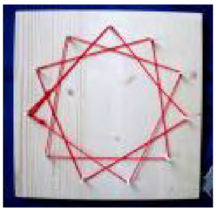
Per esempio considerate (uno per volta!) i sette modelli in fettuccia e provate per ciascuno di questi a realizzare una delle immagini rappresentate nel primo dei due fogli (A-G).

Riuscite anche a realizzare, con la stessa fettuccia, uno dei nastri H-N? Quale o quali di questi, e con quale fettuccia? Registrate qui sotto le vostre osservazioni …
Questa prima parte ha esclusivamente lo scopo di far familiarizzare i ragazzi con il materiale a loro disposizione (figure e fettucce).

2. Nastri con le ZIP
Prendete i due rettangoli di stoffa con le *zip* che avete a disposizione. Per ottenere il nastro A occorre utilizzare il rettangolo (di colore blu) con le *zip* orientate in verso opposto, chiudendo la *zip* dopo aver dato al rettangolo una torsione di 180° (che chiamiamo MEZZA TORSIONE). Invece, per ottenere N, occorre usare il rettangolo di stoffa (di colore rosso) con le *zip* orientate nello stesso verso, chiudendo la *zip* dopo aver dato al rettangolo due mezze torsioni.

I ragazzi potrebbero non avere chiaro il significato del termine "mezza torsione"; suggeriamo di non insistere sulla parola, ma di mostrare loro semplicemente un esempio, facendo vedere che cosa si intende sui rettangoli di stoffa (o su uno di carta).





Il colore qui indicato per i rettangoli di stoffa potrebbe cambiare. Si curerà comunque che, all'interno di uno stesso kit, *tutti i rettangoli con* zip *nello stesso verso siano dello stesso colore (e tutti i rettangoli con* zip *orientate in verso opposto siano pure di uno stesso colore, diverso dal precedente).*

Per ciascuno degli altri nastri di cui avete il modello in fettuccia (quelli da A a G), quale rettangolo di stoffa con *zip* occorre utilizzare per realizzarne un modello?

Registrate nella tabella qui sotto le vostre osservazioni, indicando i rettangoli di stoffa con il colore.

	Riferimento immagini in rete	**Rettangolo di stoffa utilizzato**	**Descrizione di come si è ottenuto il nastro**
A	12652	**blu**	**-1**
B	11367	**rosso**	**-2**
C	12653	**blu**	**3**
D	12655	**rosso**	**-4**
E	12650	**rosso**	**0**
F	12656	**blu**	**1**
G	12654	**blu**	**-3**
H	11384	**rosso**	**4**
I	11385	**blu**	**5**
J	11366	**blu**	**-3**
K	11373	**rosso**	**0**
L	11365	**blu**	**-1**
M	11371	**rosso**	**2**
N	11382	**rosso**	**2**

La tabella destinata ai ragazzi comprende solo le prime 7 righe, ma per comodità dell'insegnante aggiungiamo qui anche i risultati per le ultime sette. Pensiamo che l'analisi dei primi sette casi sia già più che sufficiente per i ragazzi, ma naturalmente l'insegnante ha anche la possibilità di prolungare questa attività con le classi con cui lo valuterà opportuno.
Anche la seconda colonna è un'aggiunta che non compare nella tabella dei ragazzi ed è inserita qui solo per comodità del docente, per avere sotto mano le figure corrispondenti.
Non dovrebbe essere particolarmente difficile per i ragazzi riempire la seconda (qui terza) colonna, mentre sarà sicuramente assai difficile riempire l'ultima.
Il numero che qui abbiamo registrato nell'ultima colonna della tabella è il numero delle mezze torsioni che occorrono per ricostruire il nastro a partire dal rettangolo di stoffa, con segno + o – a seconda del verso: si tratta di un'informazione concisa, ma esaustiva, nel senso che con quest'unica informazione possiamo ricostruire l'oggetto.

Vale la pena osservare esplicitamente lo "0" alla riga corrispondente al nastro E: a prima lettura può risultare sconcertante, ma proprio il fatto di maneggiare fisicamente i nastri dovrebbe rendere evidente che la fettuccia E si può riportare alla posizione classica del cilindro (senza tagliare e ricucire!).
Ovviamente non possiamo immaginare che i ragazzi arrivino subito a identificare in questo numero una maniera semplice per descrivere "come è fatto" il nastro, anche se il rifarsi a come lo hanno costruito, a partire dal rettangolo di stoffa, dovrebbe portare in maniera abbastanza naturale a individuare nelle mezze torsioni l'elemento significativo.
Lasciate comunque che riempiano questa colonna nella maniera che credono (o anche, eventualmente, se vedete che hanno molta difficoltà, lasciate che riempiano soltanto la colonna con l'indicazione del colore del nastro utilizzato e fateli magari ritornare su questa attività in un secondo tempo, alla fine del laboratorio).
L'unico parametro significativo per decidere se una descrizione "va bene o non va bene" è la sua comprensibilità: potete per esempio chiedere loro se, con la descrizione che ne hanno dato, i compagni di un altro tavolo sarebbero in grado di ricostruire il nastro. E magari, potendo investire un po' più di tempo, sarebbe interessante fare la prova di scambiare fra due tavoli le descrizioni (diverse) di due gruppi di ragazzi, per testare se si tratta di indicazioni utili per ricostruire l'oggetto.

Emerge da questa osservazione un criterio di classificazione naturale, quello per cui due nastri sono dello stesso tipo se si possono costruire con lo stesso rettangolo di stoffa.

Come vengono divisi i nastri secondo questo criterio? …

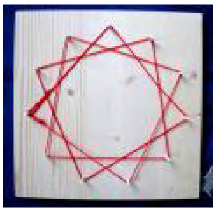
Rettangolo rosso (cilindri):	*B*	*D*	*E*	*H*	*K*	*M*	*N*
Rettangolo blu (Moebius):	*A*	*C*	*F*	*G*	*I*	*J*	*L*

È opportuno sottolineare ai ragazzi che non si tratta di arrivare a una suddivisione "giusta"; suddivisioni diverse possono essere utili per problemi diversi, e anche all'interno di questa scheda si potrebbe arrivare a suddivisioni diverse da questa.

3. Il BORDO dei nastri

Il BORDO di un "normale" cilindro è costituito da due curve distinte, messe in evidenza nella figura qui sotto.

Com'è fatto il bordo del nastro A?



Potete utilizzare uno dei rettangoli di carta che avete a disposizione, costruire un modello del nastro A attaccando con lo *scotch* i lati corti del rettangolo dopo aver dato loro una mezza torsione e seguirne il bordo, tenendo traccia del percorso fatto con un pennarello.

Si ottiene una sola curva.

Come sarà il bordo degli altri nastri?

Come avete fatto con il nastro A, potete aiutarvi nell'indagine ricorrendo ai rettangoli di carta e costruendo dei modelli come quelli in fettuccia. Quindi, per ciascuno di essi, fissate un punto di partenza sul bordo e, tenendo traccia con un pennarello del percorso fatto, osservate se riuscite a ritornarvi dopo aver percorso tutto il bordo (e quindi in questo caso il bordo è costituito da un'unica curva) oppure se ritornate al punto di partenza senza averlo percorso tutto (e quindi in questo caso il bordo è costituito da più di una curva).

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**
Numero di curve che costituiscono il bordo	*1*	*2*	*1*	*2*	*2*	*1*	*1*	*2*	*1*	*1*	*2*	*1*	*2*	*2*

Anche in questo caso, la tabella destinata ai ragazzi comprende solo i primi sette casi; spetta all'insegnante decidere se valuta opportuno "prolungare" l'attività con gli altri sette casi a disposizione.

Usiamo ora come criterio di classificazione il numero di curve che costituiscono il bordo di un nastro. Quindi, consideriamo due nastri nella stessa classe se il loro bordo è costituito dallo stesso numero di curve e in classi diverse se il loro bordo è costituito da un numero diverso di curve.

Come vengono divisi i nastri secondo questo criterio? ...

Come prima:

due curve di bordo (cilindri):	*B*	*D*	*E*	*H*	*K*	*M*	*N*
una curva di bordo (Moebius):	*A*	*C*	*F*	*G*	*I*	*J*	*L*

Si tratta della stessa suddivisione a cui eravate arrivati nell'attività precedente?

Sì □ No □

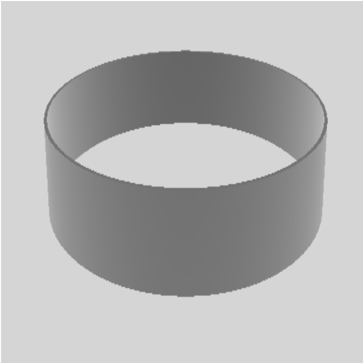
4. Diamoci un TAGLIO!

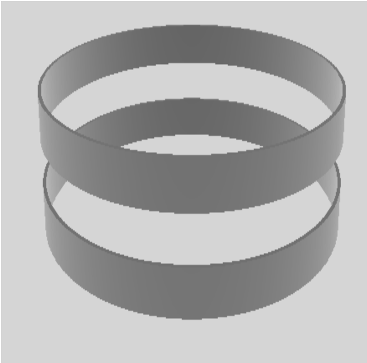
Avete osservato che i nastri si possono suddividere in due classi:

- quelli come A (che prende il nome di NASTRO DI MOEBIUS) che hanno una sola curva di bordo e che si realizzano con i rettangoli di stoffa che hanno le *zip* orientate in verso opposto;
- quelli come E (un CILINDRO) con il bordo formato da due curve e che

sono ottenuti con i rettangoli di stoffa che hanno le *zip* orientate nello stesso verso.

Per proseguire nell'osservazione costruite, se non l'avete già fatto, dei modelli in carta dei nastri A-G.





Se si taglia a metà un cilindro "normale", come quello nella figura qui sopra, lungo la "circonferenza centrale" si ottengono due cilindri identici, slacciati fra loro, di altezza metà.

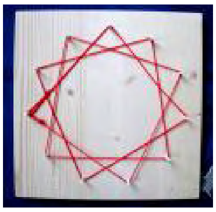
Che cosa si ottiene se si taglia a metà il nastro di Moebius A lungo la "circonferenza centrale"? Scrivete qui sotto un'ipotesi. …

Provate a rispondere alle domande ricorrendo al modello di carta che avete costruito. Che cosa avete ottenuto? …

Ci aspettiamo che molti ragazzi non si immaginino di ottenere un solo oggetto, anche se è possibile che alcuni abbiano già incontrato questa situazione. Se è così, cercate comunque di evitare che alcuni rubino l'effetto-sorpresa agli altri che non l'hanno ancora incontrata.

Che cosa accadrà tagliando lungo la "circonferenza centrale" gli altri nastri? Provate a tagliare i modelli di carta che avete costruito e registrate nella prossima tabella le vostre osservazioni.

Anche in questo caso la tabella destinata ai ragazzi ha soltanto sette righe. Non solo: ai ragazzi si chiede soltanto quanti oggetti si ottengono dopo il taglio e non si chiede altro; in particolare non si chiede di descrivere questi oggetti, ma si lascia soltanto una casella vuota a disposizione, a beneficio di chi voglia eventualmente aggiungere qualche osservazione (ma senza alcuna richiesta esplicita).



	Numero di oggetti	Descrizioni
A	*1*	*un cilindro, non annodato*
B	*2*	*due cilindri, allacciati (come un link di Hopf : vedi* ***2296****)*
C	*1*	*un cilindro, annodato (come un nodo trifoglio: vedi* ***7263****)*
D	*2*	*due cilindri, allacciati (come un link di Salomone: vedi* ***2298****)*
E	*2*	*due cilindri, slacciati fra loro*
F	*1*	*un cilindro, non annodato*
G	*1*	*un cilindro, annodato (speculare di quello ottenuto in C: vedi* ***7231****)*
H	*2*	*due cilindri, allacciati (come un link di Salomone: vedi* ***2298****)*
I	*1*	*un cilindro, annodato (nodo taurino di tipo (2,5): vedi* ***2299****)*
J	*1*	*un cilindro, annodato (speculare di quello ottenuto in C: vedi* ***7231****)*
K	*2*	*due cilindri, slacciati fra loro*
L	*1*	*un cilindro, non annodato*
M	*2*	*due cilindri, allacciati (come un link di Hopf : vedi* ***2296****)*
N	*2*	*due cilindri, allacciati (come un link di Hopf : vedi* ***2296****)*

A esclusivo beneficio dell'insegnante, abbiamo qui aggiunto l'indicazione se l'oggetto ottenuto è annodato oppure no (se è uno solo) o, nel caso gli oggetti siano due, se questi sono fra loro allacciati oppure no e abbiamo anche aggiunto il riferimento a una figura che permette di individuare QUALE tipo di nodo o link sia coinvolto; naturalmente questo riferimento (e il nome corrispondente, che qui usiamo solo come un'etichetta) è inserito solo per comodità del docente: inutile dire che non c'è alcun bisogno che i ragazzi conoscano questi nomi!

Può invece essere utile far vedere ai ragazzi a questo punto le due animazioni sul nastro di Moebius citate nell'introduzione (e scaricabili dal sito Immagini per la matematica*).*

Se usiamo come criterio di classificazione il numero di oggetti ottenuti dopo il taglio, come vengono divisi i nastri? …

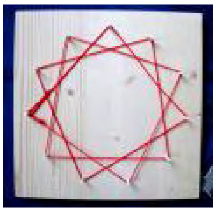
Come prima:

due oggetti (cilindri):	*B*	*D*	*E*	*H*	*K*	*M*	*N*
un solo oggetto (Moebius):	*A*	*C*	*F*	*G*	*I*	*J*	*L*

Si tratta della stessa suddivisione a cui eravate arrivati nelle attività precedenti?

Sì □ No □

Se l'insegnante lo valuta opportuno, un proseguimento molto naturale di questa attività è quello di provare a tagliare i nastri con un taglio che non passa a metà ma passa ad altezza 1/3 (un cilindro "normale" verrebbe diviso in tre parti uguali da due tagli effettuati in questo modo). Una delle animazioni che potete scaricare dal sito Immagini per la matematica*, fra le altre cose, fa anche vedere che cosa succede in questo caso, ma non mostratela ai ragazzi prima che abbiano provato a farlo "con le mani" in prima persona: sarebbe proprio un peccato toglier loro la gioia di scoprirlo!*
Un altro approfondimento che è molto naturale, ma anche molto più astratto (e che quindi non consigliamo se non in presenza di situazioni eccezionalmente mature, o anche solo eccezionalmente incuriosite dal problema) è quello di andare a indagare non solo in quanti oggetti si dividono i nastri tagliandoli a metà (se uno solo oppure due), ma anche come sono fatti questi oggetti (quello che abbiamo qui accennato nella colonna "descrizione").
Si potrebbe ad esempio stimolare i ragazzi a confrontare due situazioni in cui tagliando si ottenga lo stesso numero di oggetti, e che però per qualche motivo non sembrano del tutto "uguali", cercando di esplicitare qualcosa che le distingua. Potrebbero per esempio accorgersi che i due oggetti ottenuti tagliando a metà il nastro E sono slacciati, mentre i due ottenuti tagliando B sono allacciati. Oppure che l'unico oggetto che si ottiene tagliando a metà il nastro C è annodato, mentre nel caso di A non lo è.



SCHEDA S

STELLE

Dalle conte alle STELLE!

Proponiamo, all'inizio di questa scheda, tre diverse attività introduttive alle questioni oggetto della scheda vera e propria. Potete sceglierne una sola oppure farle tutte, oppure ancora far fare attività diverse a gruppi diversi di ragazzi.

ATTIVITÀ INTRODUTTIVA 1

Vi ricordate una delle conte che facevate da bambini? Provate a recitarne una, stando attenti ad usare bene il ritmo della filastrocca: ad ogni sillaba pronunciata corrisponde una persona. …

Disegnate qui sotto uno schema delle vostre posizioni e scrivete il testo della conta: …

Scegliete una persona che conti, che rimanga invariata per la durata dell'attività, e evidenziate il suo nome nello schema qui sopra. Nello stesso schema indicate con una freccia il verso in cui girate contando. Questo verso deve rimanere invariato fino alla fine del gioco. Se partite da chi sta contando, dove arrivate? …

E se partite dalla persona alla destra di chi conta? …

E da quella alla sua sinistra? …

Sapreste prevedere dove arrivereste iniziando a contare dalla seconda persona a destra di chi conta? …

Ora chi conta non gioca.

Se partite dalla persona alla destra di chi conta, dove finite? ...

E se partite da quella alla sua sinistra? …

Sapreste prevedere dove arrivereste iniziando a contare dalla seconda persona a destra di chi conta? …

Provate a porvi le stesse domande cambiando conta. Le persone a cui si arriva nei diversi casi sono ancora le stesse? …

Indicate quali sono secondo voi i fattori che intervengono nel determinare il risultato di una conta: …

Lo scopo di questa attività, come delle altre attività introduttive, è semplicemente quello di far prendere confidenza ai ragazzi con le situazioni in cui un certo fenomeno si ripete periodicamente. Vorremmo naturalmente che arrivassero a rendersi conto del fatto che l'ingrediente cruciale è non tanto il numero di sillabe della filastrocca, quanto il resto di questo numero nella divisione per il numero dei ragazzi fra cui si conta. Questo sarà il punto di arrivo, mentre qui siamo solo all'inizio e quindi ci accontentiamo che si stiano facendo un'idea del ruolo che giocano i diversi ingredienti. Può essere una bella idea quella di riproporre questa attività introduttiva anche alla fine del laboratorio, per verificare i cambiamenti nella comprensione della stessa situazione.

ATTIVITÀ INTRODUTTIVA 2

Nel mio PC, nella cartella “Musica” ho sette diverse cartelle, disposte in ordine alfabetico, contenenti ognuna alcune canzoni di un particolare genere musicale: Classica, Elettronica, Folk, Rock, Metal, Pop, Ska.
Io, Anna e Luca vorremmo regalare a Miky un CD di canzoni miste e ci inventiamo un metodo per comporlo.
Io faccio una conta partendo dalla cartella “Classica” con una filastrocca di 15 battute e prendo 5 canzoni dalla cartella corrispondente all’ultima battuta.
Di quale genere sono le canzoni tra le quali potrò scegliere? ...
E se scegliessi di utilizzare una filastrocca di 29 battute? Avrei finito per dover attingere dalla stessa cartella o no? ...
Anna fa lo stesso con una filastrocca di 35 battute.
Da quale cartella provengono le canzoni che sceglie Anna? ...
Luca, che usa una filastrocca di 82 battute, vorrebbe sapere subito da quale cartella dovrà scegliere le canzoni, senza dover contare fino in fondo.
Potete aiutare Luca? ...
Se si aggiunge anche Gigi, che è un metallaro convinto, di quante battute deve essere la sua filastrocca per consentirgli di scegliere le canzoni nella cartella “Metal”? ...
Quella che avete dato è la sola risposta possibile? ...
Se pensate che non lo sia, sapete darne un’altra? E sapete descrivere tutte le possibilità? ...
Valgono gli stessi commenti fatti a proposito dell’attività introduttiva 1.

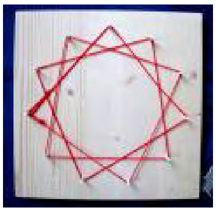
ATTIVITÀ INTRODUTTIVA 3

Un caro amico è in vacanza all’estero in un paese in cui il fuso orario è +4 ore rispetto a dove viviamo.
Riempite la seguente tabella:

a casa sono le ore...	**dall’amico sono le ore...**
6 a.m. di lunedì	*10 a.m. di lunedì*
10 a.m. di lunedì	*2 p.m. di lunedì*
8 p.m. di lunedì	*12 p.m. di lunedì*
11 p.m. di lunedì	*3 a.m. di martedì*
2 a.m. di lunedì	**6 a.m. di lunedì**
6 a.m. di lunedì	**10 a.m. di lunedì**
4 p.m. di lunedì	**8 p.m. di lunedì**
7 p.m. di lunedì	**11 p.m. di lunedì**

Valgono gli stessi commenti fatti a proposito dell’attività introduttiva 1. Aggiungiamo in questo caso che potrebbe essere utile cominciare a mettere a disposizione dei ragazzi il geopiano a 12 pioli.

Altre attività introduttive che possono essere utili - in aggiunta o in sostituzione di



quelle qui proposte - sono attività sul calendario (che sfruttino la periodicità dei giorni della settimana, o dei mesi dell'anno): problemi di questo tipo verranno poi proposti nell'attività 2.

ATTIVITÀ 1

Avete a disposizione due geopiani con 7 e 12 pioli disposti ad intervalli regolari su una circonferenza. Utilizzando il filo di lana potete collegare i pioli tra loro. Sul tavolo trovate anche delle immagini e un tabellone.

La prima colonna dello schema riassuntivo che trovate qui sotto vi fornisce le istruzioni per collegare i pioli dei geopiani; quando tornate col filo al punto di partenza, compilate la seconda, la terza e la quarta colonna dello schema, cercate l'immagine che rappresenta la figura che avete creato col filo e posizionatela nel tabellone. Vi compiliamo noi le prime due righe di ciascuna tabella per chiarire quello che intendiamo che facciate.

> ATTENZIONE: scegliete un verso di percorrenza sul geopiano secondo il quale conterete i pioli per collegare i fili. Mantenete invariato il verso fissato fino alla fine del laboratorio (salvo quando sia diversamente specificato).

Controllate che i ragazzi prestino attenzione a questo inciso: molti errori in quanto segue possono nascere dal fatto di procedere a "far la conta" ogni tanto in verso orario, ogni tanto in verso antiorario. Vanno bene entrambe le scelte (purché si proceda coerentemente).

Per completare l'ultima colonna dello schema riassuntivo, invece, continuate (utilizzando eventualmente più fili), sempre con la stessa "regola" indicata nella prima colonna della tabella, fino a quando da ogni piolo passa un filo.

Geopiano con 7 pioli:

Istruzioni per collegare i pioli	**Nome della figura**	**Descrizione della figura**	**Con la prima figura avete toccato tutti i pioli del geopiano?**	**Numero di fili necessari perché da ogni piolo passi un filo**
Tutti	(7,1)	Un poligono di sette lati	Sì	1
Ogni due	(7,2)	Una stella di sette lati	Sì	1
Ogni tre	*(7,3)*	*Una stella di sette lati*	*Sì*	*1*
Ogni quattro	*(7,4)*	*Una stella di sette lati*	*Sì*	*1*
Ogni cinque	*(7,5)*	*Una stella di sette lati*	*Sì*	*1*
Ogni sei	*(7,6)*	*Una stella di sette lati*	*Sì*	*1*

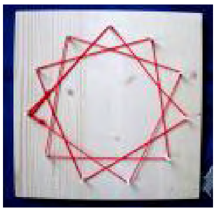
Siete riusciti sempre a collegare tutti i pioli utilizzando un unico filo? ... *Sì*

Geopiano con 12 pioli:

Istruzioni per collegare i pioli	**Nome della figura**	**Descrizione della figura**	**Con la prima figura avete toccato tutti i pioli del geopiano?**	**Numero di fili necessari perché da ogni piolo passi un filo**
Tutti	(12,1)	Un poligono di 12 lati	Sì	1
Ogni due	(12,2)	Un poligono di 6 lati	No	2
Ogni tre	*(12,3)*	*Un quadrato*	*No*	*3*
Ogni quattro	*(12,4)*	*Un triangolo equilatero*	*No*	*4*
Ogni cinque	*(12,5)*	*Una stella di 12 lati*	*Sì*	*1*
Ogni sei	*(12,6)*	*Un segmento*	*No*	*6*
Ogni sette	*(12,7)*	*Una stella di 12 lati*	*Sì*	*1*
Ogni otto	*(12,8)*	*Un triangolo equilatero*	*No*	*4*
Ogni nove	*(12,9)*	*Un quadrato*	*No*	*3*
Ogni dieci	*(12,10)*	*Un poligono di 6 lati*	*No*	*2*
Ogni undici	*(12,11)*	*Un poligono di 12 lati*	*Sì*	*1*

Siete riusciti sempre a collegare tutti i pioli utilizzando un unico nastro? ... *No*
Vi siete di certo resi conto che i diversi numeri si comportano in maniera differente quando vengono utilizzati per costruire stelle. Nella costruzione delle stelle quali differenze di comportamento avete notato in particolare tra i due numeri 7 e 12? ...
A quali caratteristiche specifiche dei due numeri sono secondo voi legati questi differenti comportamenti? Fate un'ipotesi e cercate di verificarla, eventualmente utilizzando un altro dei geopiani che avete a disposizione, oppure facendo un disegno. ...
È facile che qui i ragazzi propongano il fatto che 7 è dispari e 12 è pari; il che ha del vero, naturalmente, ma non è esattamente il punto in questione. Il punto è che 7 è un numero primo, quindi tutti i numeri da 1 a 6 non hanno divisori in comuni con 7: è proprio la presenza di un divisore comune (fra il numero dei pioli e il "passo" con cui si costruisce la figura) che fa sì che la costruzione finisca prima di aver toccato tutti i pioli.
Tenete conto del fatto che avete a disposizione anche un geopiano da 15 pioli (e uno da 11) se pensate che sia il momento giusto per approfondire la cosa.

Che cosa succederebbe con le scelte (7,7) e (12,12)? ...



Se i ragazzi non sanno come rispondere a questa domanda, potete lasciarla per il momento in sospeso e riprenderla dopo che i ragazzi avranno visto gli esempi legati al calendario nell'attività 2.

Nell'ultima colonna compare un numero: il numero dei fili che ci vogliono per completare il disegno in modo da toccare tutti i pioli del geopiano. Sapete vedere come è legato questo numero ai due numeri della seconda colonna, che identificano la figura (il numero dei pioli del geopiano e il numero che dà il "passo" con cui avete costruito la figura stessa)? Fate qualche ipotesi …
Lasciamo al docente il compito di decidere quanto insistere su quest'ultima domanda. Non è facile - a questo stadio - che i ragazzi si accorgano che il numero nell'ultima colonna è proprio il MCD dei due numeri nella seconda colonna. Per aiutarli ad arrivare autonomamente a questa scoperta, sarebbe necessario indagare una casistica un po' più ampia. Se volete farlo, vi suggeriamo, prima di proporre ai ragazzi il quesito, di far loro riempire delle tabelle analoghe alle due precedenti rispetto ai geopiani da 11 e da 15 pioli che sono in dotazione nel kit*, e magari anche con altri numeri abbastanza piccoli (5,8,9,10, ...) con cui, una volta capita l'idea, possono facilmente fare a meno del geopiano e utilizzare delle figure.*

ATTIVITÀ 2

Se vado in piscina oggi che è martedì e poi continuo a andare un giorno sì e un giorno no, capita, prima o poi, che ci vada di lunedì? E di mercoledì? E di giovedì? E anche in un qualsiasi altro giorno della settimana? … *Sì*

Se vado a teatro oggi che è il 12 gennaio e poi continuo a andare un mese sì e un mese no, capita, prima o poi, che ci vada in febbraio? E in ottobre? E anche in un qualsiasi altro mese dell'anno? ... *No, andrò solo nei mesi "dispari", cioè gennaio, marzo, maggio, luglio, settembre, novembre.*

Come mai secondo voi questo comportamento diverso per i giorni e per i mesi?...

Che cosa succede se vado in piscina un giorno sì e tre no? E se vado a teatro un mese sì e sette no?

Andando in piscina un giorno sì e tre no finisco prima o poi per aver nuotato in tutti i giorni della settimana? sì □ no □

Andando a teatro un mese sì e sette no finisco prima o poi per esserci andato in tutti i mesi dell'anno? sì □ no □

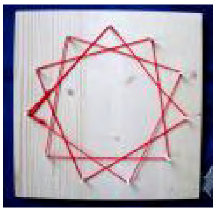
C'è secondo voi una qualche relazione tra queste domande e la costruzione delle stelle che avete visto nell'attività precedente? Sapreste spiegarla? …
*Il fatto che una stella (7,*k*) tocchi, o meno, tutti i 7 pioli del geopiano equivale al fatto che, procedendo nei giorni della settimana con una periodicità di* k *in* k*, si arriva prima o poi a toccarli tutti.*
*Il fatto che una stella (12,*k*) tocchi, o meno, tutti i 12 pioli del geopiano equivale al fatto che, procedendo nei mesi dell'anno con una periodicità di* k *in* k*, si arriva*

prima o poi a toccarli tutti.
Se i ragazzi stentano a vedere il legame fra le due cose, può essere una buona idea quella di utilizzare i cartellini con i nomi dei giorni della settimana (rispettivamente dei mesi dell'anno) da disporre vicino ai pioli del geopiano.

È questo anche il momento per tornare sulla domanda relativa alle figure (7,7) o (12,12): con questo parallelo diventa evidente il fatto che, se ad esempio comincio a andare in piscina di domenica e vado ogni sette giorni, andrò sempre di domenica.

ATTIVITÀ 3
Avete a disposizione un mazzo di cartellini con segnati dei numeri. Provate a distribuirli sui pioli del geopiano da 7, scegliendo un piolo di partenza e proseguendo con ordine senza saltare alcun numero e alcun piolo.
Sono a disposizione 5 mazzi di carte con i numeri da -20 a +100: lasciamo all'insegnante la decisione di quali lasciare a disposizione dei ragazzi, in particolare se utilizzare o meno anche i numeri negativi.
NB: la formulazione usata nella scheda per i ragazzi prevede di usare i numeri da 0 a 100, quindi nel caso l'insegnante voglia utilizzare anche i numeri negativi dovrà tenerne conto.
Ci interessa capire come vengono raggruppati i numeri, e quali sono le caratteristiche che sono comuni a tutti i numeri che fanno parte dello stesso gruppo e che invece li distinguono dai numeri appartenenti ad altri gruppi. Cominciate ad esempio a rispondere a queste domande (per intenderci, chiamiamo ogni piolo con il nome dato dal numero più piccolo che compare su quel piolo; avremo quindi il piolo 0, il piolo 1, … ecc., fino al piolo 6):
Su quale piolo è finito il numero 22? E il numero 78? … *entrambi sul piolo 1*
E il numero 42? Il numero 84? … *entrambi sul piolo 0*
E il numero 38? ... *sul piolo 3*
Il numero 11? ... *sul piolo 4*
E se fossimo andati avanti anche oltre il 100, su quale piolo sarebbe finito il numero 365? ... *sul piolo 1*
Che caratteristica hanno tutti i numeri che finiscono sul piolo con l'etichetta 0? ...
Si tratta di tutti i multipli di 7.
E quelli che finiscono sul piolo 1? *Si tratta di tutti i numeri che divisi per 7 danno resto 1, ovvero tutti i numeri che si possono scrivere nella forma* $7n+1$.

*Se avete deciso di utilizzare anche i numeri negativi, sarà opportuno a questo punto aggiungere qualche domanda; prima di questo, però, sarà necessaria qualche precisazione riguardo alla "etichetta" con cui contrassegnare il piolo: non potremo più dire infatti che si tratta del "*numero più piccolo che compare su quel piolo*", ma dovremo precisare il "*numero più piccolo positivo o nullo che compare su quel piolo*".*
Si potrà allora poi chiedere su quale piolo finiscono alcuni numeri negativi, e occorre prestare attenzione all'errore standard che è facile commettere in questi casi: il resto, nella divisione per 7, di -1 o -8 non è 1 oppure 8 (come si potrebbe essere



indotti a pensare), bensì 6, perché -1=(-1)7+6 e -8=(-2)7+6.

Avete così descritto un criterio per raggruppare i numeri.
Secondo tale criterio, ogni numero intero può essere inserito in almeno un gruppo? ...
Ci sono numeri che possono essere inseriti in più di un gruppo? ... Perché? ...
Ogni numero si inserisce in esattamente un gruppo; per individuare su quale piolo sarà inserito un dato numero, basta determinare il suo resto nella divisione per 7.

Provate adesso a utilizzare il geopiano da 12 pioli e a rispondere alle stesse domande che vi abbiamo posto con il geopiano da 7 pioli.
Su quale piolo è finito il numero 22? ... *sul piolo 10*
E il numero 78? ... *sul piolo 6*
E il numero 42? ... *sul piolo 6*
Il numero 84? ... *sul piolo 0*
E il numero 38? ... *sul piolo 2*
Il numero 11? ... *sul piolo 11*
E se fossimo andati avanti anche oltre il 100, su quale piolo sarebbe finito il numero 365? ... *sul piolo 5*
Che caratteristica hanno tutti i numeri che finiscono sul piolo con l'etichetta 0? ... *Si tratta di tutti i multipli di 12.*
E quelli che finiscono sul piolo 1? ... *Si tratta di tutti i numeri che divisi per 12 danno resto 1, ovvero tutti i numeri che si possono scrivere nella forma 12*n*+1.*

Potreste a questo punto anche far tornare i ragazzi sulla prima attività introduttiva, quella delle conte, e riproporre le stesse domande.

Chiudiamo la scheda con delle attività un po' marginali rispetto al percorso proposto, attività che potrebbero tranquillamente essere ignorate, oppure essere usate a distanza di qualche tempo, per verificare cosa sia rimasto ai ragazzi dei concetti trattati.
Si tratta di problemi non facili, che dovete proporre ai ragazzi come qualcosa di particolarmente intrigante, anche per lasciare a loro la soddisfazione di una "sfida". In realtà la difficoltà del problema non nasce da particolari prerequisiti necessari per la soluzione, quanto dalla fantasia richiesta per capire in che modo tener conto della periodicità del fenomeno: e, come spesso accade, il problema complicato diventa poi semplicissimo quando "si vede" come funziona.
Suggeriamo in ogni caso, se decidete di utilizzarli, di chiedere poi esplicitamente ai ragazzi che legame vedono fra questi problemi e il laboratorio delle stelle.

E ora… risolvete questi!

1. Francesco ha compiuto 13 anni l'8 Febbraio del 2010 (era Lunedì!). In che giorno della settimana è nato? Vi sembra una domanda troppo difficile?

Proviamo allora a fare un passo per volta: sapendo che l'8-2-2010 era lunedì, possiamo dire che giorno era l'8-2-2009? ... Perché? ...

Si tratta di 365 giorni prima; ma ci interessa solo il giorno della settimana quindi ... siamo "sul geopiano del 7" per cui 365=7n+1 è la stessa cosa di 1, quindi l'8 febbraio 2009 era domenica.

Allora possiamo dire che Francesco è nato di ... (attenzione agli anni bisestili!).

Ogni anno si torna indietro di un giorno, salvo gli anni bisestili in cui si torna indietro di 2; ogni 4 anni si torna indietro quindi di 1+1+1+2=5 giorni. Dobbiamo farlo 3 volte (a partire da domenica 8-2-09 in cui ha compiuto 12 anni) quindi dobbiamo tornare indietro di 15 giorni ovvero di 1 giorno: l'8 febbraio 1997 era sabato.

E, a questo punto, non avrete nessuna difficoltà a dire in che giorno della settimana Francesco festeggerà il suo ventesimo compleanno…

l'8 febbraio 2017 sarà un mercoledì.

2) Quale è l'ultima cifra di 2009^{2009} ? Difficile?! Provate prima a moltiplicare 2009 per 2009; sapete dire allora qual è l'ultima cifra di 2009^2 ? ...

Provate ora a moltiplicare il risultato ottenuto ancora per 2009; potete ora dire quale è l'ultima cifra di 2009^3: ...

E quale è l'ultima cifra di 2009^4 ? ...

E di 2009^5 ? ...

Sembra che l'ultima cifra si ripeta in maniera regolare: ma secondo voi si tratta di un caso o di una necessità? ... Perché? ...

E allora cosa possiamo dire sull'ultima cifra di 2009^{2009} ?

I ragazzi avranno notato che si ottengono alternate le cifre 1 e 9. Una giustificazione di questo fatto può essere data a livelli diversi di rigore: ad esempio è sufficiente richiamare l'usuale algoritmo della moltiplicazione e accorgersi quindi che l'ultima cifra del risultato dipende solo dalle ultime cifre dei due fattori.

Se l'insegnante ritiene che sia il caso, si potrebbe anche approfittare di questo problema, con i ragazzi più grandi di una III media, per avviarli all'uso della notazione letterale. In tal caso faremo loro osservare che un numero che finisce per 9 è un numero che si può scrivere nella forma

$$10n+9$$

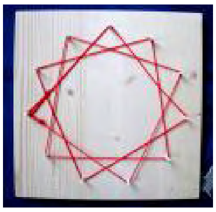
e quindi elevando al quadrato un numero di questo tipo si ottiene

$(10n+9)(10n+9) = 100n^2 + 90n + 90n + 81 =$

$= 10\,(10n^2 + 18n+8) + 1 = 10\,N + 1,$

cioè un numero che finisce per 1.

Appurato che $(10n+9)^2$ *è numero che finisce per 1, avremo anche che* $(10n+9)^{2k}$ *finisce per 1, perché è il prodotto di k termini che finiscono*



per 1; e, in maniera analoga a quanto visto prima,

$(10q+1)(10m+1) = 10h+1$.

Quindi tutte le potenze a esponente pari di un numero che finisce per 9 finiscono per 1. Per concludere che tutte le potenze a esponente dispari finiscono per 9 resta da osservare che

$(10n+9)^{2k+1} = (10n+9)^{2k}\,(10n+9) = (10q+1)(10n+9) = 10s+9$

Spetta all'insegnante valutare se è opportuno introdurre con i ragazzi questa notazione.

Ricordiamo però che si tratta solo di una scusa, se lo scopo è quello di introdurre il calcolo letterale: per risolvere il problema proposto, è più che sufficiente l'osservazione sul comportamento delle cifre finali in un prodotto, che è osservazione alla portata di un bambino di scuole elementari.

E ora vi sfidiamo! Qual è l'ultima cifra di 1953467^{2636} ? ...

Come avete trovato questa soluzione? ...

La situazione è analoga, ma qui un po' più complessa perché le cifre finali delle potenze 7^n si ripetono con periodicità quattro.

Occorrerà innanzitutto osservare che la cifra finale di 1953467^n è la stessa della cifra finale di 7^n (e, di nuovo, ci basta ricordare come si fa una moltiplicazione). Esaminando poi le potenze di 7 abbiamo che:

- $7^2 = 49$ *finisce per 9*
- $9 \times 7 = 63$ *finisce per 3 quindi anche 7^3 finisce per 3*
- $7 \times 3 = 21$ *finisce per 1 quindi anche 7^4 finisce per 1*

A questo punto il ciclo si ripete sicché, per ogni numero intero n, 7^{4n} finisce per 1, 7^{4n+1} finisce per 7, 7^{4n+2} finisce per 9, 7^{4n+3} finisce per 3.

Si tratterà quindi solo di stabilire che cos'è il resto di 2636, ovvero di 36, nella divisione per 4. Questo resto è 0 e quindi il numero richiesto finisce per 1.

SCHEDA T

TOMBOLA!

In questa scheda giocheremo a tombola.
Cominciamo a capire le regole del gioco; ogni gruppo avrà una cartella con 12 immagini e un po' di fagioli.
Il vostro insegnante estrarrà un cartellino. Se questo cartellino porta scritto, per esempio, "due assi di simmetria" voi potete mettere il fagiolo su una sola figura che ha due assi di simmetria. Per esempio, se la vostra cartella della tombola contenesse le figure di questi quadrilateri, su quale di questi potreste mettere il fagiolo?

Rettangolo	sì □	no □
Rombo	sì □	no □
Parallelogrammo	sì □	no □
Trapezio	sì □	no □
Quadrato	sì □	no □

La risposta nel caso del quadrato può suscitare qualche discussione: alcuni ragazzi potrebbero dire che il quadrato ha 4 assi di simmetria (e quindi non ne ha - solo - 2), mentre altri potrebbero dire che se ne ha 4 vuol dire che ne ha 2 (e poi anche altri 2). Abbiamo lasciato volutamente la frase "due assi di simmetria" (invece di specificare "ALMENO due assi di simmetria" piuttosto che "ESATTAMENTE due assi di simmetria"), proprio perché pensiamo che discussioni di questo genere possano essere preziose per aumentare nei ragazzi il grado di consapevolezza su questi concetti (e l'attenzione al linguaggio!). Prima di iniziare il gioco i ragazzi dovranno comunque mettersi d'accordo su un'interpretazione.

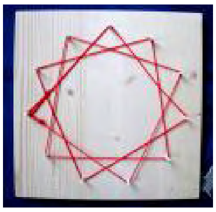
Immaginate adesso che la vostra cartella della tombola contenga le figure di questi poligoni regolari; su quale di questi potreste mettere il fagiolo se il cartellino estratto dal vostro insegnante dicesse su "tre assi di simmetria"?

Triangolo equilatero	sì □	no □
Quadrato	sì □	no □
Pentagono regolare	sì □	no □
Esagono regolare	sì □	no □

Naturalmente nel caso i ragazzi si accordassero sull'interpretazione "esattamente 3", la risposta sarebbe affermativa solo nel caso del triangolo equilatero.

Ci potranno essere anche altri cartellini con una scritta del tipo "rotazione di 90°"; in tal caso potreste mettere il fagiolo su una figura soltanto se questa figura non cambiasse aspetto quando la ruotate di 90°.
Ad esempio, su quali quadrilateri potreste mettere il fagiolo?

Rettangolo	sì □	no □
Rombo	sì □	no □
Parallelogrammo	sì □	no □
Trapezio	sì □	no □



Quadrato sì □ no □

E su quali poligoni regolari potreste mettere il fagiolo se il cartellino estratto dicesse "rotazione di 120°"?

Triangolo equilatero sì □ no □

Quadrato sì □ no □

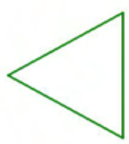
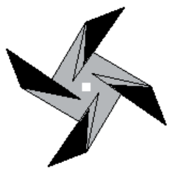
Pentagono regolare sì □ no □

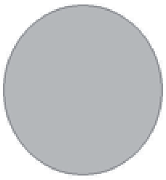
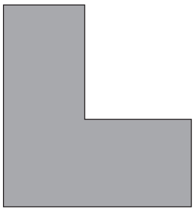
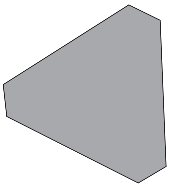
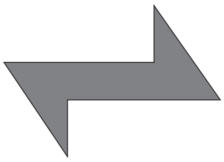
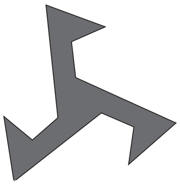
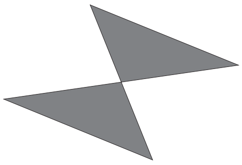
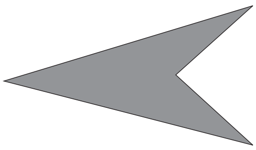
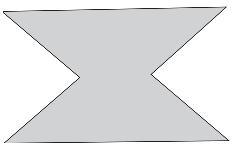
Esagono regolare sì □ no □

Adesso che avete capito le regole del gioco, fate un po' di "riscaldamento": avete a disposizione un mazzo di schedine con tante figure; fatevene dare dal vostro insegnante qualcuna, per esempio una di quelle che trovate nella prossima tabella (nella prima colonna) e riempite le altre due colonne in corrispondenza, scrivendo come si potrà comportare quella figura nel gioco della tombola (ovvero: per quali estrazioni potreste mettere il fagiolo…).

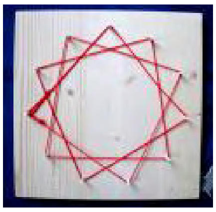
Per capire se la figura ha assi di simmetria, potete usare uno specchietto; per capire se ruotandola non cambia aspetto potete utilizzare un lucido: ricalcate la figura sul lucido, usate una puntina per fissare il lucido alla figura sottostante nel suo centro di simmetria e giratelo finché le due figure combaciano di nuovo. Avete dovuto fare un giro completo o siete riusciti a fermarvi un po' prima?

Naturalmente il docente ha il compito di decidere quanto far durare questi "preparativi" del gioco, in funzione della classe e di come voglia inserire questa attività nel normale percorso curricolare. In ogni caso questa valutazione dovrà tenere conto del fatto che, per lasciare poi al gioco vero e proprio il giusto ritmo, ci sarà comunque bisogno di una fase in cui ciascun gruppo compie esattamente questo tipo di analisi preliminare sulle 12 figure della cartella della tombola che hanno ricevuto. Potrebbe quindi non esserci bisogno di ulteriori attività preliminari su altre figure.

Figura	Rotazioni	Assi di simmetria
	Tre rotazioni: una di 120°, una di 240°, una di 360°	Tre assi di simmetria
	Quattro rotazioni: una di 90°, una di 180°, una di 270°, una di 360°	Non ci sono assi di simmetria

	*Infinite rotazioni (di centro il centro della circonferenza e angolo arbitrario)*	*Infiniti assi di simmetria (le rette che contengono il centro).*
	*Solo la rotazione di 360°*	*Un asse di simmetria*
	*Tre rotazioni: una di 120°, una di 240°, una di 360°*	*Tre assi di simmetria*
	*Due rotazioni: una di 180° e una di 360°*	*Non ci sono assi di simmetria*
	*Tre rotazioni: una di 120°, una di 240°, una di 360°*	*Non ci sono assi di simmetria*
	*Due rotazioni: una di 180° e una di 360°*	*Non ci sono assi di simmetria*
	*Solo la rotazione di 360°*	*Un asse di simmetria*
	*Due rotazioni: una di 180° e una di 360°*	*Due assi di simmetria*

E adesso… a voi giocare!



Diamo qui qualche ulteriore consiglio su come organizzare il gioco, alla luce delle sperimentazioni fin qui effettuate.

Ogni cartella della tombola comprende 12 figure, organizzate in tre categorie: 4 poligoni; 4 figure geometriche più articolate; 4 cartelli stradali o altri simboli di uso comune.

Suggeriamo di suddividere la classe in gruppi di 4 o 5 studenti al massimo (le cartelle disponibili sono 6) e distribuire a ciascun gruppo sia una cartella plastificata della tombola, sia la stessa cartella stampata da CD-rom (va bene in bianco e nero).

Come già si diceva, conviene (per non rallentare troppo la fase successiva del gioco vero e proprio) che, prima di iniziare le estrazioni, i ragazzi riconoscano il tipo di simmetria di ogni figura presente sulla loro cartella, aiutandosi con gli specchietti e con i lucidi in dotazione nel kit. *A questo scopo possono utilizzare e "pasticciare" la cartella in bianco e nero, segnando in ogni casella il tipo di simmetria di ciascuna figura (o anche compiere le stesse operazioni sulla tabella già fornita in questa scheda).*

Solo in un secondo momento l'insegnante potrà dare avvio alla tombola, estraendo un cartellino alla volta.

Come già si è detto, i cartellini che vengono estratti possono contenere diciture del tipo "rotazione di 60 gradi" oppure "due assi di simmetria", e i ragazzi potranno mettere il fagiolo su una qualsiasi figura che resti invariata con una rotazione di 60 gradi nel primo caso e su una qualsiasi figura che abbia almeno due assi di simmetria nel secondo caso.

Vale la pena fare esplicitamente alcune osservazioni:

- *abbiamo già discusso della diversa possibile interpretazione di un'affermazione"due assi di simmetria"; anche per l'espressione "esattamente due assi di simmetria" vale la pena di aprire una discussione; l'importante è che i ragazzi arrivino a una regola condivisa prima di iniziare il gioco; è possibile (come accade nella tombola "normale") che con una certa estrazione un gruppo di ragazzi non possa sistemare alcun fagiolo;*
- *è possibile anche (e questo invece nella tombola "normale" non accade) che con una certa estrazione un gruppo di ragazzi possa sistemare il fagiolo in più caselle: in tal caso il gruppo dovrà decidere quale scelta è più conveniente. L'ambiguità è voluta, perché la discussione relativa a questa decisione da prendere può essere un buon elemento per affinare la consapevolezza dei ragazzi sul tema della simmetria (vogliamo in sostanza che i ragazzi si rendano conto - magari attraverso qualche errore commesso nelle prime partite giocate - che, in presenza di una ambiguità di questo tipo, sarà per loro più conveniente mettere il fagiolo sulla figura che ha* **meno** *simmetria possibile…);*

- *altre regole possono essere introdotte rispetto a situazioni ambigue; ad esempio ci sono immagini (come la figura* ***1787*** *qui a fianco) che permettono due approcci diversi: possiamo decidere di tenere conto solo della geometria della figura e ignorare il colore (e, in tal caso, la figura avrà due assi di simmetria, e un centro di rotazione: una rotazione di 180° la lascia invariata); oppure possiamo ammettere fra le simmetrie della figura solo quelle trasformazioni che mandano la figura in sé rispettando anche i colori (e, in tal caso, la figura non ha alcuna simmetria a parte l'identità). Entrambe le scelte sono legittime, e riteniamo quindi che sia utile aspettare che il problema venga sollevato dai ragazzi e che siano loro a confrontarsi su questa decisione. Ciò può diventare un ulteriore momento significativo di riflessione. Non tutte le schede sono di pari difficoltà: alcune figure possono generare qualche perplessità a seconda di come sono raffigurate. Ad esempio è più difficile per i ragazzi riconoscere la simmetria del quadrato (4 assi di simmetria e 4 rotazioni che lo lasciano invariato) quando esso è disegnato con i lati non paralleli ai bordi della casella.*

Nonostante tutte le nostre avvertenze, la tombola è un gioco, quindi è bene che i ragazzi si "lascino andare": così facendo, le regole appariranno meno complicate!